

LUIS FILIPE VON RAINER FABIANI

9,5
9,5
9,5
9,5
9,5

Simulação de Bocais em Escoamento Compressível

Orientador:
Prof. Dr. Ernani Vitillo Volpe

São Paulo

2003

LUIS FILIPE VON RAINER FABIANI

Simulação de Bocais em Escoamento Compressível

Trabalho de formatura apresentado
à Escola Politécnica da Universi-
dade de São Paulo para obtenção do
Título de Graduação em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia Mecânica.

Orientador:
Prof. Dr. Ernani Vitillo Volpe

São Paulo

2003

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600010622

FICHA CATALOGRAFICA

1361931

Fabiani, Luis Filipe von Rainer

Simulação de Bocais em Escoamento Compressível. - São Paulo, 2003.
63p.

Trabalho de formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Bocais 2. CFD 3. Métodos Numéricos
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia Mecânica II.t.

Índice

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vi
Lista de Abreviaturas e Símbolos	vii
Resumo	viii
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Equações de Navier-Stokes	4
2.2 Equações de Euler	6
2.3 Condições de Contorno	8
3 Implementação Numérica	10
3.1 Caso Quasi-Unidimensional	10
3.1.1 Método Steger-Warming	14
3.1.2 Método Steger-Warming Modificado	15
3.1.3 Método Roe da Separação da Diferença do Vetor de Fluxo	17
3.2 Condições de Contorno	18
3.2.1 Condições de Contorno da Entrada	18
3.2.2 Condições de Contorno da Saída	19
3.3 Comparação dos Métodos Utilizados	20
4 Resultados	22
4.1 Simplificação	22
4.2 Validação	35
4.2.1 Análise Integral	35
4.2.2 Simulação	40

5	Simulações	44
6	Conclusão	61
	Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

2.1	Velocidades Características	9
3.1	Volume de controle do caso Quasi-1D	10
3.2	Fluxo de informações no V.C.	15
4.1	Geometria 3D	23
4.2	Corte - Contorno de velocidade	23
4.3	Corte - Vetores de velocidade	24
4.4	Corte - Contorno do número de Mach	24
4.5	Contorno de pressão	25
4.6	Corte - Contorno de pressão	25
4.7	Corte - Contorno de temperatura	26
4.8	Contorno de densidade	26
4.9	Corte - Contorno de densidade	27
4.10	Vetores de velocidades - 2D Viscoso	27
4.11	Campo de velocidades - 2D Viscoso	28
4.12	Número de Mach - 2D Viscoso	28
4.13	Campo de pressão - 2D Viscoso	29
4.14	Campo de pressão - 2D Viscoso	29
4.15	Campo de densidade - 2D Viscoso	30
4.16	Vetores de velocidades - 2D Invíscido	30
4.17	Campo de velocidades - 2D Invíscido	31
4.18	Número de Mach - 2D Invíscido	31
4.19	Campo de pressão - 2D Invíscido	32
4.20	Campo de temperatura - 2D Invíscido	32
4.21	Campo de densidade - 2D Invíscido	33

4.22 Variação de v_y - 2D Viscoso	34
4.23 Variação de v_x - 2D Viscoso	35
4.24 Vetores de velocidades - 1D Invíscido	35
4.25 Campo de velocidades - 1D Invíscido	36
4.26 Número de Mach - 1D Invíscido	36
4.27 Campo de pressão - 1D Invíscido	37
4.28 Campo de pressão - 1D Invíscido	37
4.29 Campo de densidade - 1D Invíscido	38
4.30 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação	39
4.31 Geometria e Número de Mach	41
4.32 Pressão e Velocidade	42
4.33 Temperatura e Densidade	43
 5.1 Condições de Operação	44
5.2 Geometria e Número de Mach - 1	47
5.3 Pressão e Velocidade - 1	47
5.4 Temperatura e Densidade - 1	48
5.5 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação - 1	48
5.6 Geometria e Número de Mach - 2	49
5.7 Pressão e Velocidade - 2	51
5.8 Temperatura e Densidade - 2	51
5.9 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação - 2	52
5.10 Geometria e Número de Mach - 3	52
5.11 Pressão e Velocidade - 3	53
5.12 Temperatura e Densidade - 3	53
5.13 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação - 3	54
5.14 Geometria e Número de Mach - 4	54
5.15 Pressão e Velocidade - 4	55
5.16 Temperatura e Densidade - 4	55
5.17 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação - 4	56
5.18 Geometria e Número de Mach - 5	56
5.19 Pressão e Velocidade - 5	57
5.20 Temperatura e Densidade - 5	57

5.21 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação - 5	58
5.22 Geometria e Número de Mach - 6	59
5.23 Pressão e Velocidade - 6	59
5.24 Temperatura e Densidade - 6	60
5.25 Fluxo de massa e Entalpia de Estagnação - 6	60

Lista de Tabelas

3.1	Condições de contorno	18
3.2	Comparação entre os Métodos	21
4.1	Comparação entre Simulações	38
4.2	Quantidade de Movimento	39
5.1	Bocais simulados	46
5.2	Empuxo dos bocais	58

Lista de Abreviaturas e Símbolos

A	Matriz do Jacobiano do Fluxo
c	Velocidade do som no meio
c_p	Calor específico à pressão constante
c_v	Calor específico à volume constante
ϵ	Energia
γ	Relação entre calores específicos do fluido: $\frac{c_p}{c_v}$
Ma	Número de Mach
μ	Viscosidade
p , P	Pressão
P_0	Pressão de estagnação
ψ	Quantidade extensiva
ρ	Densidade
S	Área da seção de passagem
τ_{ij}	Tensão de cisalhamento no plano ij
σ_i	Tensão de compressão na direção i
T	Temperatura
t	Tempo
u	Velocidade

PROJETO INVERSO DE BOCAIS EM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

autor: LUIS FILIPE VON RAINER FABIANI

orientador: Prof. Dr. ERNANI VITILLO VOLPE

RESUMO

Métodos numéricos são de grande importância na engenharia, e um engenheiro que usá-los deverá entendê-los e saber escolher o melhor método para uma determinada aplicação. Este trabalho visa a implantação de um método numérico para a resolução das equações de Euler em um perfil de um bocal, para o escoamento compressível e quasi-unidimensional. O problema estudado nesse trabalho, um bocal com geometria axisimétrica, submetido a um escoamento de um fluido compressível sem viscosidade, térmica e caloricamente perfeito, é de relativa simplicidade. Porém, justamente por sua simplicidade, ele é ideal para o aprendizado de métodos para a resolução do escoamento compressível.

Capítulo 1

Introdução

A Dinâmica dos Fluidos apresenta inúmeros casos de interesse prático na engenharia, que compreendem desde os sistemas mais simples de ventilação até os mais complexos projetos de aerodinâmica e hidrodinâmica.

Devido a esta imensa diversidade de aplicações seus problemas sempre foram objeto de intensa investigação, tanto através da abordagem experimental, onde se realizam ensaios em túneis de vento e água, quanto através da abordagem teórica, onde se procura obter soluções para os modelos matemáticos que descrevem o escoamento.

Na abordagem teórica, formulam-se modelos com base nos princípios de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Entretanto, na Dinâmica dos Fluidos, esses princípios assumem a forma de equações diferenciais parciais não lineares, para as quais não se conhecem soluções analíticas gerais. Ao contrário, as soluções analíticas são conhecidas apenas para uma coleção restrita de problemas, que compreendem uma pequena parte da vasta gama de problemas e aplicações de interesse prático.

Tais condições favoreceram o desenvolvimento de técnicas de simulação numérica, como alternativa natural aos métodos analíticos, para a obtenção de soluções aproximadas. Tais técnicas constituem-se nos dias de hoje em uma linha de pesquisa

denominada Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD*).

O aparecimento de computadores e o aumento da sua capacidade de processamento ao longo dos últimos 30 anos proporcionou um grande impulso a essa tendência, e atualmente há métodos numéricos extremamente robustos, que são capazes de gerar soluções aproximadas confiáveis para uma imensa variedade de problemas.

Na realidade, os métodos numéricos tornaram-se uma ferramenta de uso comum no dia-a-dia dos escritórios de engenharia, permitindo a simulação de diversas alternativas para o problema em questão num curto espaço de tempo e com custos bastante menores se comparados aqueles necessários para a realização dos ensaios correspondentes.

Entretanto vale ressaltar que tanto a simulação computacional quanto os ensaios em túneis de vento apresentam limitações, que os tornam processos complementares. Os túneis de vento são limitados pelo elevado custo necessário para a preparação dos modelos. A simulação computacional é limitada pelo dificuldade no desenvolvimento de algoritmos que atendam às reais condições do problema. Desta forma a simulação computacional é usualmente utilizada para restringir o número de ensaios a serem realizados nos túneis de vento, reduzindo com isso o tempo e o custo requeridos na obtenção da melhor solução.

Deve-se acrescentar que o uso adequado e eficiente da CFD depende em grande medida do conhecimento que o usuário tenha dos métodos envolvidos. Uma vez que por melhores que sejam, esses programas não são infalíveis, e não há um método universalmente aceito em todas as aplicações. Cabe ao engenheiro, portanto, a escolha do método mais adequado à cada aplicação considerada. Fica assim evidente a necessidade desse profissional ter um conhecimento básico desses métodos.

O objetivo deste trabalho é a implantação de um método para resolver numericamente as equações de Euler no espaço quasi-unidimensional, e com os resultados obtidos nessa etapa compara-los com os resultados de um software comercial. Este

*Sigla em inglês – *Computational Fluid Dynamics*

projeto é o primeiro passo de um esforço para desenvolver na EPUSP uma linha de pesquisa focada no projeto inverso aerodinâmico. Pretende-se com ele lançar as bases para desenvolvimentos futuros em projeto de superfícies aerodinâmicas como asas.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Equações de Navier-Stokes

O estudo de um problema da Dinâmica dos Fluidos utilizando a CFD é realizado através da solução das equações que governam o escoamento, ou seja, as equações de Conservação da Massa, Quantidade de Movimento e Energia (2.1). À equação de conservação da Quantidade de Movimento para fluidos Newtonianos-Stokesianos dá-se o nome de equação Navier-Stokes (N.S.). Entretanto, na área aeroespacial costuma-se chamar de Navier-Stokes o sistema completo (2.1), que também inclui as equações da continuidade e energia. No presente trabalho essa designação será adotada.

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g} \\ \frac{D\epsilon}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} - p \nabla \cdot \vec{u} + \tau : \nabla \vec{u} + \rho \vec{g} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde o operador diferencial:

$$\frac{D(\)}{Dt} = \frac{\partial(\)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\)$$

representa a derivada total ou substantiva. Nesta formulação, ρ é a densidade, p a pressão, \vec{u} a velocidade, ϵ a energia interna específica e \vec{q} é a transferência de calor.

No caso do escoamento compressível, esse sistema é acrescido de uma equação de estado, usualmente a equação dos gases perfeitos.

$$p = p(\rho, \epsilon)$$

Para os estudos desenvolvidos neste trabalho, é conveniente escrever as equações (2.1) na forma de um divergente no domínio espaço tempo. No caso bi-dimensional, essa forma é representada por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

onde as variáveis U, F e G são:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \sigma_x \\ \rho u v + \tau_{yx} \\ (e + \sigma_x) u + \tau_{yx} v - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v + \tau_{xy} \\ \rho v^2 + \sigma_y \\ (e + \sigma_y) v + \tau_{xy} u - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

As variáveis $e, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ e τ_{yx} representam:

$$\begin{cases} e = \rho\epsilon + \frac{\rho(u^2+v^2)}{2} \\ \sigma_x = p - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = p - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.6)$$

onde e é a energia total por unidade de volume, μ e λ são o primeiro e o segundo coeficientes de viscosidade, k é a condutibilidade térmica, e T é a temperatura.

A forma divergente da equação de Navier-Stokes (2.2) e a forma convencional (2.1) são fisicamente equivalentes. Porém do ponto de vista dos métodos numéricos essas formas têm propriedades diferentes. A vantagem em se utilizar a forma divergente é apontada por R. MacCormack em [4]. Na literatura a forma divergente também é conhecida como forma conservativa, em virtude de sua relação com fluxos das quantidades de interesse através da fronteira de um volume de controle, como pode ser visto na aplicação do teorema de Gauss ao teorema do transporte de Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \iiint_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} dV + \iint_{SC} \rho\psi \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi \vec{u}) \right] dV \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 Equações de Euler

As equações de Euler representam uma simplificação importante das equações de Navier-Stokes (2.1). Elas governam o escoamento de um fluido térmica e caloricamente perfeito, cuja viscosidade e condutibilidade térmica são ambas zero [4]. É evidente que tal fluido não existe na natureza. Entretanto essa simplificação é adequada para escoamentos onde os efeitos de viscosidade e condução de calor não são importantes (4). Toda uma classe de escoamentos governados pela pressão em aerodinâmica inclui-se nesse grupo. A forma geral das equações de Euler corresponde a:

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} \\ \frac{D\epsilon}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{u} + \rho \vec{g} \end{cases} \quad (2.8)$$

As variáveis mostradas acima são as mesmas descritas para as equações de Navier-Stokes (2.1). Na forma conservativa, para o caso bi-dimensional, o sistema de equações assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

sendo que os vetores U , F e G agora representam

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (e + p) u \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (e + p) v \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Como descrito em [10], a simulação numérica do escoamento implica na solução das equações que o governam, por um método numérico. Este método corresponde à formulação de aproximações para as equações do modelo, e um algoritmo para

resolvê-las. Nesse caso, o programa de computador resolverá numericamente um sistema formado pelas equações de Euler: A equação da conservação do momento, da continuidade, da energia, assim como equações de estado, com a implantação do método de volumes finitos, ou MVF.

O princípio básico do MVF consiste em dividir o domínio do escoamento num conjunto de Volumes de Controle e aplicar as equações de balanço a cada um desses Volumes de Controle, usando para isso o teorema do transporte de Reynolds (2.7).

2.3 Condições de Contorno

Para se resolver uma ODE, são necessárias condições iniciais e também condições de contorno. As condições iniciais são muito importantes, e devem ser escolhidas com cuidado, já que podem acelerar a convergência da solução quando escolhidas corretamente, e por outro lado há casos nos quais ela pode causar a divergência da solução, quando escolhida erroneamente. Utilizando-se uma condição de contorno do tipo partida (4.2.2), pode-se observar o regime transitório até o bocal atingir o regime permanente, e os resultados foram satisfatórios.

Já as condições de contorno são as condições do escoamento, às quais a geometria do bocal está sujeita. A Termodinâmica do Escoamento Compressível explica que as quantidades físicas do fluido se propagam com a velocidade de um pulso de pressão, ou seja, com a velocidade do som no meio. Há três tipos de velocidades que governam a propagação das informações, u , $u + c$ e $u - c$, as chamadas velocidades características. Em um escoamento subsônico ($Ma < 1$), as características do escoamento se propagam em todas as direções, já que a velocidade característica $u - c$ tem sinal contrário às demais, enquanto que para o caso supersônico ($Ma > 1$) elas se propagam na direção do escoamento (todas as velocidades características têm o mesmo sinal). Portanto, é necessário distinguir essas duas situações e agir de acordo com cada caso.

Para ilustrar melhor o problema, considere um bocal quasi-1D, convergente-

divergente, como mostra a figura 2.1.

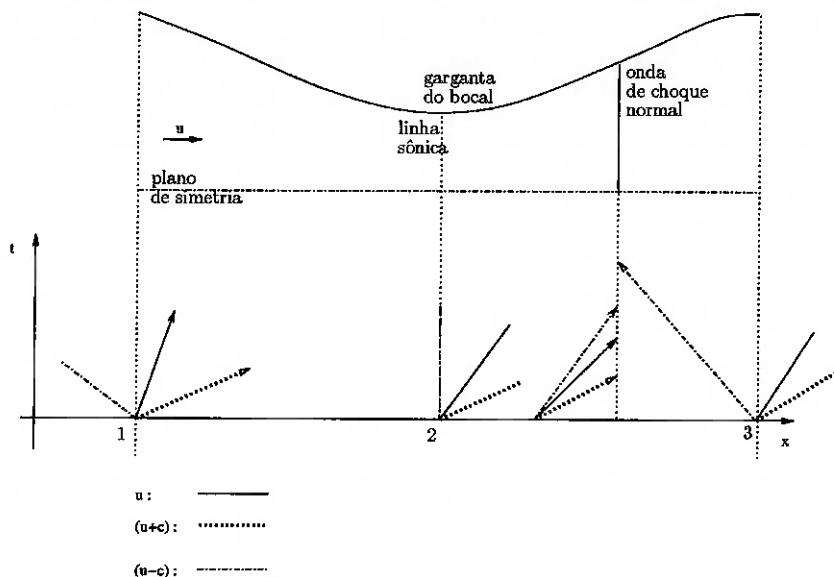


Figura 2.1: Velocidades características de um bocal convergente-convergente

O escoamento se torna supersônico após a linha sônica, que ocorre na garganta do bocal. A inclinação das velocidades características nas fronteiras do volume de controle indicam como o escoamento influi sobre elas e, portanto, mostram que certos graus de liberdade são necessários quando se especifica as condições de contorno, para não deixar as propriedades sobre-especificadas.

Capítulo 3

Implementação Numérica

3.1 Caso Quasi-Unidimensional

Para um escoamento quasi-unidimensional, é admitido que a variação da geometria é suave o bastante para que a componente vertical da velocidade seja desprezível, frente à componente paralela ao eixo das abscissas. Tome-se a figura abaixo, representando uma passagem genérica $S(x)$.

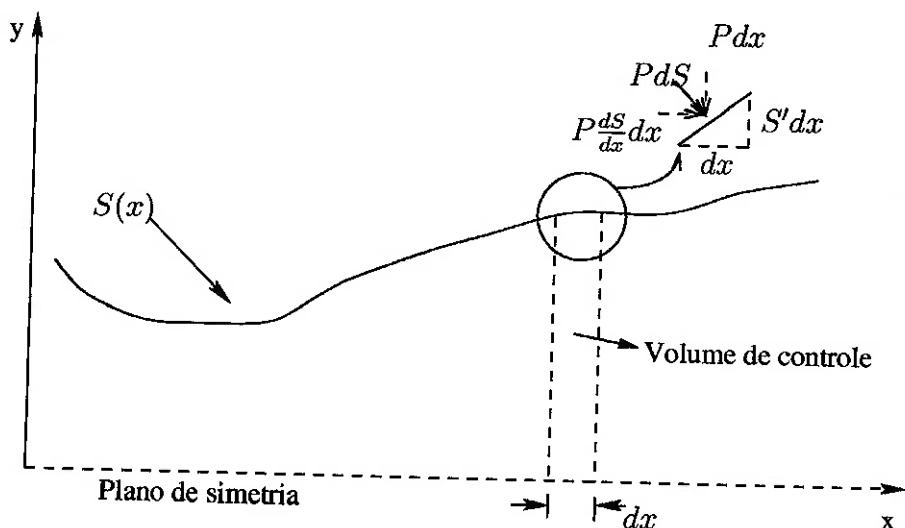


Figura 3.1: Geometria arbitrária e um volume de controle

As forças agindo no volume de controle, Pdx e $P\frac{dS}{dx}dx$ são tais que a primeira é cancelada por simetria, e a segunda quando integrada fornece o empuxo no bocal.

Os vetores U (2.10) e F (2.11) assumem a seguinte forma:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p) u \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

O balanço de massa, momento e energia na superfície do volume de controle (Figura 3.1) é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix} S \Delta x \right] + \left[S \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p) u \end{pmatrix} \right]_{x+\Delta x}^{S(x+\Delta x)} + \\ - \left[S \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p) u \end{pmatrix} \right]_x^{S(x)} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dS}{dx} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta x \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dividindo a equação (3.3) por Δx , levando ao limite para $\Delta x \rightarrow 0$, e introduzindo os vetores 3.1 e 3.2,

$$\frac{\partial (SU)}{\partial t} + \frac{\partial (SF)}{\partial x} = Q \quad (3.4)$$

onde o termo não homogêneo é dado por:

$$Q \equiv \frac{dS}{dx} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim a equação principal é dada por:

$$\frac{\partial (U)}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (SF)}{\partial x} = Q \quad (3.5)$$

Esta equação é um equação diferencial parcial (PDE), e precisa ser resolvida por um método numérico, já que a solução analítica é restrita a poucos casos. O MVF utilizado na resolução desta equação pertence a uma classe chamada de *Split Fluxes*, ou seja, o fluxo dado por

$$\frac{1}{S} \frac{\partial (SF)}{\partial x}$$

é dividido em duas partes. Pode-se escrever F como [4]

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x}$$

definindo

$$A \equiv \frac{\partial F}{\partial U}$$

prova-se que:

$$F = AU$$

A equação 3.5 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{S} A \frac{\partial (US)}{\partial x} = Q \quad (3.6)$$

e a matriz A , o Jacobiano do Fluxo, é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3) \frac{u^2}{2} & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ (\gamma - 1)u^3 - \frac{\gamma eu}{\rho} & \frac{\gamma e}{\rho} & \gamma u \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Para as equações de Euler, esta matriz apresenta todos os auto-valores reais. Assim, ela pode ser diagonalizada pela seguinte transformação de similaridade:

$$A = S^{-1} C_A^{-1} \Lambda_A C_A S$$

e estas matrizes são dadas por:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \alpha\beta & -u\beta & \beta \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \alpha & \rho u & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

$$C_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{c^2} \\ 0 & \rho c & 1 \\ 0 & -\rho c & 1 \end{bmatrix} \quad C_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & \frac{1}{2\rho c} & \frac{-1}{2\rho c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{u^2}{2} \\ \beta &\equiv (\gamma - 1) \end{aligned}$$

Ainda, a matriz diagonal com os autovalores de A é dada por:

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & (u + c) & 0 \\ 0 & 0 & (u - c) \end{bmatrix}$$

Os valores da diagonal principal são as velocidades características definidas anteriormente (Figura 2.1). Então, os *Split Fluxes* são definidos por:

$$F_+ = A_+ U$$

$$F_- = A_- U$$

e

$$A_+ = S^{-1} C_A^{-1} \Lambda_{A+} C_A S$$

$$A_- = A - A_+ \Rightarrow A_- = S^{-1} C_A^{-1} \Lambda_{A-} C_A S$$

Λ_{A+} é definido como sendo a matriz diagonal contendo somente os autovalores positivos de A . Por outro lado, Λ_{A-} é definido como sendo a matriz diagonal que contém somente os autovalores negativos de A . Esses autovalores positivos e negativos podem ser separados por uma das formas a seguir:

$$\begin{cases} \lambda_+ = \frac{\lambda + |\lambda|}{2} \\ \lambda_- = \frac{\lambda - |\lambda|}{2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \lambda_+ = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}}{2} \\ \lambda_- = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}}{2} \end{cases}$$

esta última formulação é utilizada para evitar instabilidades numéricas no curso em que $\lambda \rightarrow 0$. Os valores adotados para ζ são da ordem de 10^{-3} , ou de um modo geral, $\zeta \ll 1$.

Aplicando essas definições às equação (3.6), obtemos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (F_+ S)}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial (F_- S)}{\partial x} = Q \quad (3.8)$$

Para a resolução desta nova ODE, são utilizados três métodos numéricos, *Steger-Warming*, *Modified Steger-Warming* e *Roe Flux Difference Vector Splitting*.

3.1.1 Método Steger-Warming

Pelo método *Steger-Warming* (SW), o vetor de fluxo é separado de acordo com os sinais das velocidades características do escoamento (u , $u + c$ e $u - c$). Por exemplo, se um escoamento subsônico se move na mesma direção do eixo das abscissas, u e $u + c$ serão positivos e $u - c$ será negativo. Este método consegue aplicar diferentes esquemas de interpolação (*upwind* ou *downwind*), para as diferentes porções do domínio, de uma maneira mais eficiente, dependendo da direção das informações e das velocidades características.

Deste modo, a equação (3.8) é aproximada da seguinte maneira:

$$U^{n+1} = U^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x S} \right) * \left[F_{i+\frac{1}{2}}^n S_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^n S_{i-\frac{1}{2}} \right] + Q^n \Delta t$$

na qual:

$$\begin{cases} S_{i+\frac{1}{2}} = S\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \\ S_{i-\frac{1}{2}} = S\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right) \\ \bar{S} = \frac{S_{i+\frac{1}{2}} + S_{i-\frac{1}{2}}}{2} \end{cases}$$

e também:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P_n^i d\bar{S}}{\bar{S}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{S}}{dx} = \left(\frac{S_{i+\frac{1}{2}} - S_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = F_{+(i)}^n + F_{-(i+1)}^n = A_{+i}^n U_i^n + A_{-i+1}^n U_{i+1}^n$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = F_{-(i)}^n + F_{+(i-1)}^n = A_{-i}^n U_i^n + A_{+i-1}^n U_{i-1}^n$$

A figura 3.2 ilustra melhor os fluxos de informação nas fronteiras do volume de controle:

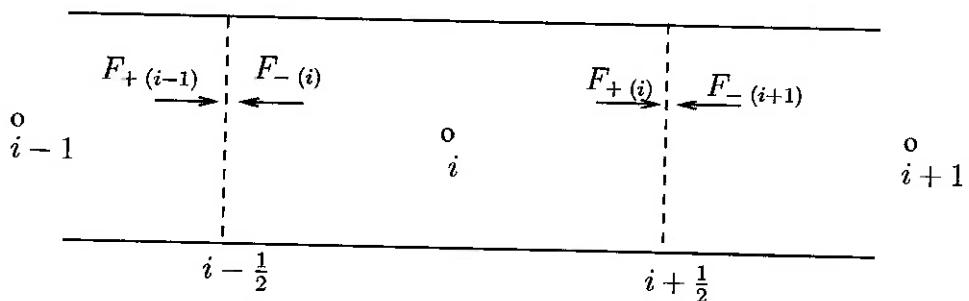


Figura 3.2: Fluxos de informação nas fronteiras do volume de controle

3.1.2 Método Steger-Warming Modificado

O método Steger-Warming, apesar de poderoso, apresenta uma grande dissipação numérica, o que pode aumentar o número de iterações necessárias para a convergência do problema, ou pior, causar problemas com a exatidão da solução, uma

vez que a dissipação numérica suaviza os gradientes. Assim, modificações a esse método foram propostas, como mostrado a seguir.

No método Steger-Warming modificado (MSW), os vetores de fluxo são calculados de maneira diferente:

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^n &= F_{+(i+\frac{1}{2})}^n + F_{-(i+\frac{1}{2})}^n = \bar{A}_{+(i+\frac{1}{2})}^n U_i^n + \bar{A}_{-(i+\frac{1}{2})}^n U_{i+1}^n \\ F_{i-\frac{1}{2}}^n &= F_{+(i-\frac{1}{2})}^n + F_{-(i-\frac{1}{2})}^n = \bar{A}_{+(i-\frac{1}{2})}^n U_{i-1}^n + \bar{A}_{-(i-\frac{1}{2})}^n U_i^n \end{aligned}$$

na qual os jacobianos \bar{A} são calculados utilizando uma média entre as grandezas nos pontos da malha próximos à superfícies na qual o fluxo irá ser aproximado:

$$\begin{cases} \bar{A}_{\pm(i+\frac{1}{2})} \Rightarrow \text{Propriedades obtidas de } \bar{U}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{U_i + U_{i+1}}{2} \\ \bar{A}_{\pm(i-\frac{1}{2})} \Rightarrow \text{Propriedades obtidas de } \bar{U}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{U_{i-1} + U_i}{2} \end{cases}$$

Caso seja necessário introduzir mais dissipação numérica, o fluxo computado pelo método original é composto com o método modificado. Isto é feito através de um *peso* (w_t):

$$\begin{aligned} P_{g_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{P_{i+1} - P_i}{\min(P_i, P_{i+1})} \\ w_{t,i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{1 + P_{g_{i+\frac{1}{2}}}^2} \end{aligned}$$

e

$$F_{i+\frac{1}{2}} = w_{t,i+\frac{1}{2}} F_{i+\frac{1}{2}}^{(MSW)} + (1 - w_{t,i+\frac{1}{2}}) F_{i+\frac{1}{2}}^{(SW)}$$

Apesar de um comprometimento da qualidade do resultado, como dito anteriormente, é obtida uma solução aproximada, o que pode ser muito interessante, dados os curtos prazos que se dispõe hoje em dia para concluir uma análise.

3.1.3 Método Roe da Separação da Diferença do Vetor de Fluxo

Neste método, a matriz do jacobiano do fluxo é calculada na interface do volume de controle, utilizando uma média geométrica:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{i+\frac{1}{2}} &= \sqrt{\rho_i * \rho_{i+1}} \\ \hat{u}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_i} u_i + \sqrt{\rho_{i+1}} u_{i+1}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \\ \hat{h}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \left\{ \sqrt{\rho_i} \left(\frac{e_i + P_i}{\rho_i} \right) + \sqrt{\rho_{i+1}} \left(\frac{e_{i+1} + P_{i+1}}{\rho_{i+1}} \right) \right\}\end{aligned}$$

Estas grandezas são utilizadas para se calcular $\hat{A}_{i+\frac{1}{2}}$. Ainda, o método Roe separa a diferença do vetor de fluxo, e não o vetor de fluxo em si. Assim, esses são dados por:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} - \frac{1}{2} \left| \hat{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| (U_{i+1} - U_i)$$

onde

$$|A| \equiv A_+ - A_-$$

Este método, por apresentar muito pouca dissipação numérica, pode posicionar ondas de choque em lugares onde não seria possível, como por exemplo numa ocasião que violaria a segunda lei da termodinâmica [9]. Há simulações nas quais a onda de choque ocorrem em lugares que não são possíveis de acordo com a segunda lei da termodinâmica. Portanto, uma correção na entropia se faz necessária, para que sempre haja um aumento de entropia e não o contrário. Sendo $\hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}$ um autovalor de $\hat{A}_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}, \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}} + \hat{c}_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{c}_{i+\frac{1}{2}}$$

onde

$$\hat{c}_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\hat{h}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^2) \right)}$$

Sendo λ_i e λ_{i+1} os valores deste autovalor nos pontos i e $i + 1$, e também definindo $\epsilon_{i+\frac{1}{2}}$ como

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2}} = \max \left\{ 0, \hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} - \lambda_i, \lambda_{i+1} - \hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} \right\}$$

Assim, se $|\hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \leq \epsilon_{i+\frac{1}{2}}$, então $\hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}}{\epsilon_{i+\frac{1}{2}}} + \epsilon_{i+\frac{1}{2}} \right)$. Os detalhes desta formulação estão em [4].

3.2 Condições de Contorno

De acordo com [4], quatro propriedades termodinâmicas devem ser especificadas para a resolução das equações de Euler no caso bi-dimensional, ou três propriedades para o caso quasi-unidimensional. As velocidades características do escoamento determinam o número e o tipo de condições de contorno que precisam ser especificadas (2.3). A tabela 3.1 mostra as quantidades a serem especificadas sobre a informação externa ao escoamento e o número de características a serem resolvidas tanto na entrada quanto na saída.

		Quantidades a serem especificadas	Características a serem resolvidas
Entrada	Subsônica	p_t, T_t	$1 \rightarrow (u - c)$
	Supersônica	todas	$0 \rightarrow$ nenhuma
Saída	Subsônica	p_e	$2 \rightarrow u, (u + c)$
	Supersônica	nenhuma	$3 \rightarrow$ todas

Tabela 3.1: Condições de contorno

Os índices t e e referem-se às propriedades de estagnação e estática, respectivamente.

3.2.1 Condições de Contorno da Entrada

Caso a entrada seja subsônica, as quantidades físicas mudam de acordo com o escoamento, e precisam ser calculadas da seguinte forma:

$$R = \frac{-\lambda_4}{1 - \lambda_4} [P_2 - P_1 - \rho c(u_2 - u_1)]$$

onde os índices 1 e 2 dizem respeito aos pontos da malha na entrada e imediatamente após a ela, respectivamente, e

$$\lambda_4 = (u - c) \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{R}{\frac{\partial P}{\partial u} - \rho c} \\ \frac{\partial P}{\partial u} &= P_t \left\{ \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \left[1 - \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{u^2}{a_*^2} \right]^{\frac{1}{(\gamma - 1)}} \right\} \left(-2 \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{u}{a_*^2} \right) \\ a_*^2 &= \frac{2}{(\gamma + 1)} c^2 \left[1 + \frac{(\gamma - 1) M a^2}{2} \right] \\ T(u) &= T_t \left[1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{u^2}{a_*^2} \right] \\ P(u) &= P_t \left[\frac{T(u)}{T_t} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}\end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}u_1^{n+1} &= u_1^n + \delta u \\ P_1^{n+1} &= P(u_1^{n+1}) \\ T_1^{n+1} &= T(u_1^{n+1})\end{aligned}$$

as outras quantidades físicas são calculadas isentropicamente.

3.2.2 Condições de Contorno da Saída

Como mencionado anteriormente, caso o escoamento seja supersônico na saída, as quantidades físicas são calculadas conforme os outros pontos do domínio. Caso contrário, as seguintes equações são utilizadas:

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{-\lambda_1}{(1 + \lambda_1)} \left[\rho_n - \rho_{n-1} \frac{1}{c^2} (P_n - P_{n-1} - 1) \right] \\ R_2 &= \frac{-\lambda_2}{(1 + \lambda_2)} [P_N - P_{N-1} + \rho c (u_N - u_{N-1})] \\ R_4 &= \frac{-\lambda_4}{(1 + \lambda_4)} [P_N - P_{N-1} - \rho c (u_N - u_{N-1})]\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ \lambda_2 &= (u + c) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ \lambda_4 &= (u - c) \frac{\Delta t}{\Delta x}\end{aligned}$$

e os índices N e $N - 1$ são referentes aos pontos da malha na saída e imediatamente antes dela, respectivamente. Portanto,

$$\delta p = \begin{cases} \frac{R_1 + R_4}{2} & \text{se } Ma_{N-1} > 1 \\ 0 & \text{se } Ma_{N-1} < 1, \text{ assumindo que } \frac{\partial P_{\text{saída}}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \rho = R_1 + \frac{\delta P}{c^2} \\ \delta u = \frac{(R_2 - \delta P)}{\rho c} \end{cases}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}u_N^{n+1} &= u_N^n + \delta u \\ P_N^{n+1} &= P_N^n + \delta P \\ \rho_N^{n+1} &= \rho_N^n + \delta \rho\end{aligned}$$

as outras quantidades físicas são calculadas isoentropicamente.

3.3 Comparação dos Métodos Utilizados

Em todos os casos, o incremento do tempo, Δt é dado por

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{\text{CFL} \Delta x}{|u| + c} \right\}$$

A condição de Courant-Friedrich-Levy (CFL) se faz necessária, dada a formulação explícita. Assim, $\text{CFL} = 0.9$ e Δt é calculado a cada iteração. De modo geral, $\text{CFL} < 1$.

Utilizando a mesma geometria e condições iniciais apresentadas na seção 4.2.2, obtém-se os resultados apresentados na tabela a seguir.

Método	Número de iterações	Tempo da simulação (s)
Steger-Warming	3326	3.633
Steger-Warming Modificado	3143	3.433
Roe	3304	3.601

Tabela 3.2: Métodos de simulação

O tempo da simulação é dado por $tempo = tempo + \Delta t$, para cada iteração. Assim, é possível observar que para uma tolerância de 10^{-4} , os diferentes métodos apresentam um número diferente de iterações para se chegar na convergência, bem como o tempo da simulação. Ainda, o método *Steger-Warming Modificado* é o que apresenta o menor número de iterações, e portanto é o método mais eficiente para um bocal convergente-divergente.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Simplificação

A utilização de softwares comerciais é de muita importância para a validação dos resultados obtidos já que esses são exaustivamente testados por profissionais da área e usuários do mundo inteiro. O software FLUENT foi escolhido pelo aluno devido à sua fácil utilização e disponibilidade no departamento de engenharia mecânica.

Primeiro, um bocal convergente-divergente foi construída em três dimensões, como mostrado na figura 4.1. Os parâmetros de simulação foram $p_{\text{entrada}} = 28200\text{Pa}$ e $p_{\text{saída}} = 0\text{Pa}$, sendo $p_{\text{ambiente}} = 100.000\text{Pa}$. Deste modo, o bocal encontra-se blocoado (número de Mach igual a 1 na garganta), como é observado na figura 4.4.

É observada também uma onda de choque, e seus efeitos no escoamento como recuperação da pressão (Figura 4.5) e da densidade (Figura 4.8) e diminuição da velocidade (Figura 4.2). Outros efeitos interessantes são a presença de velocidades nulas próximas à parede, devido ao princípio da aderência completa e o descolamento da camada limite.

Comparando-se as figuras (4.2 a 4.9) com as figuras (4.10 a 4.15), os resultados são compatíveis com uma simplificação do modelo, considerando o escoamento como sendo axisimétrico e resolvendo apenas uma seção do domínio, considerando-o bidimensional.

Nesse caso, é observado um leve descolamento da camada limite próximo à pa-

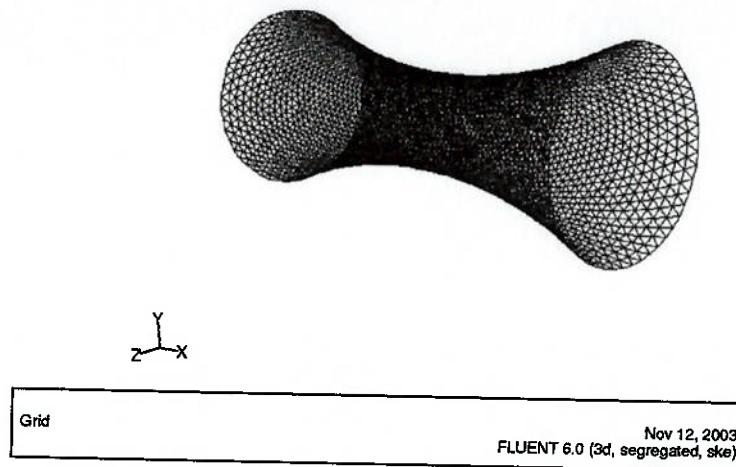


Figura 4.1: Geometria e malha

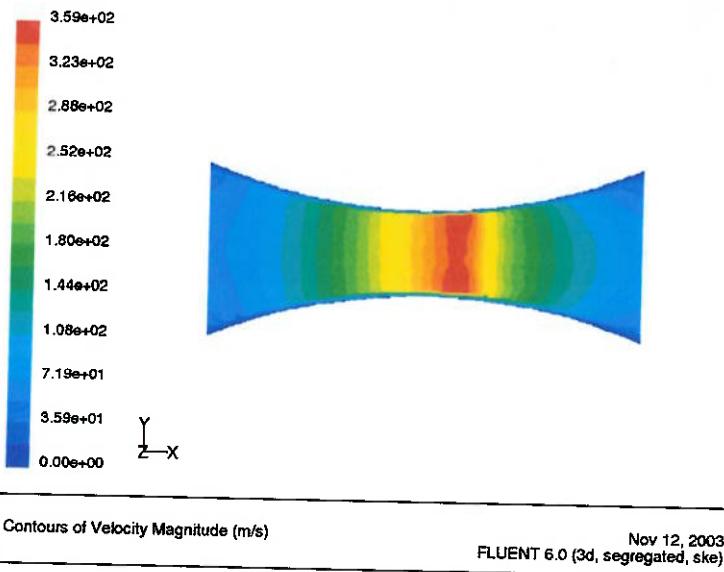


Figura 4.2: Corte de um plano mostrando os contornos de velocidade

rede, bem como velocidade zero próximo a ela.

O próximo teste a ser efetuado é o da hipótese de que o fluido é termica e caloricamente perfeito. Para isso, uma simulação utilizando um fluido invíscido e um fluido com a turbulência simulada pelo modelo $k-\epsilon$. Os resultados para o escoamento invíscido são mostrados adiante. O modelo do escoamento, para um fluido sem

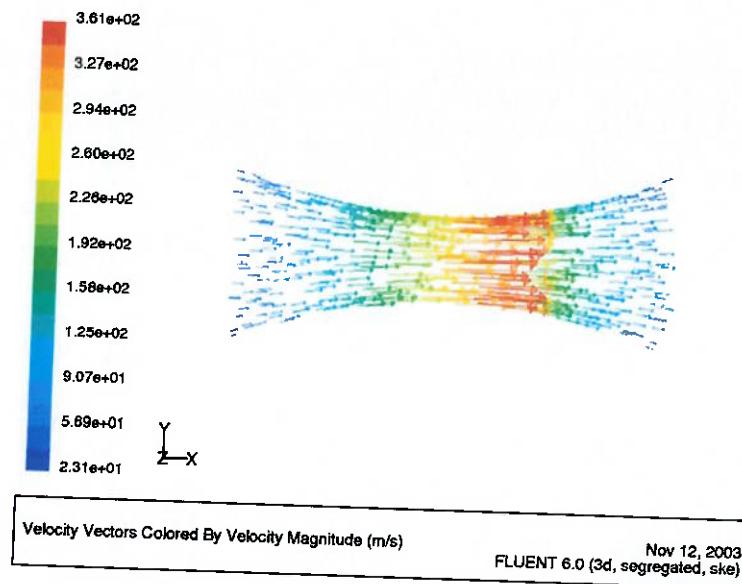


Figura 4.3: Corte de um plano mostrando os vetores de velocidade

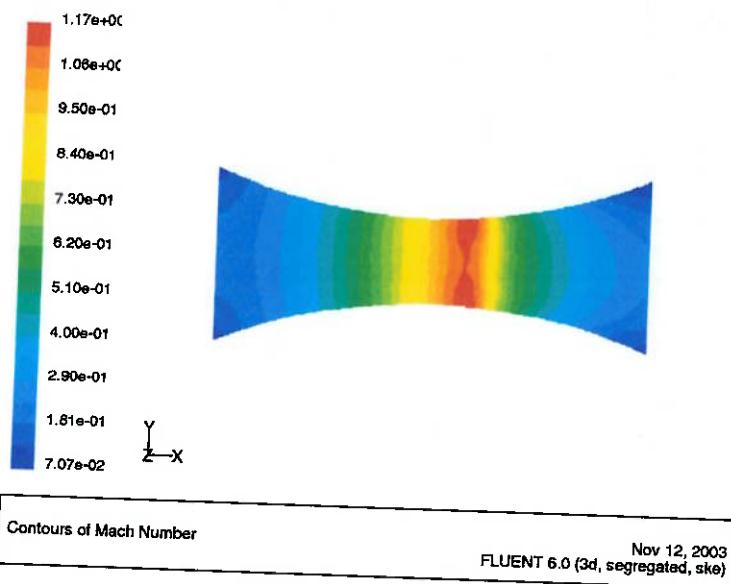


Figura 4.4: Corte de um plano mostrando o contorno do número de Mach

viscosidade, não apresenta descolamento nem velocidades nulas na parede (superfície da geometria), como visto anteriormente. Pode-se observar que o modelo usado no software comercial não resolve a onda de choque como uma discontinuidade, mas em alguns pontos da geometria, mesmo comportamento apresentado pelo software de simulação utilizado pelo aluno. Este resultado era esperado, e é explicado em

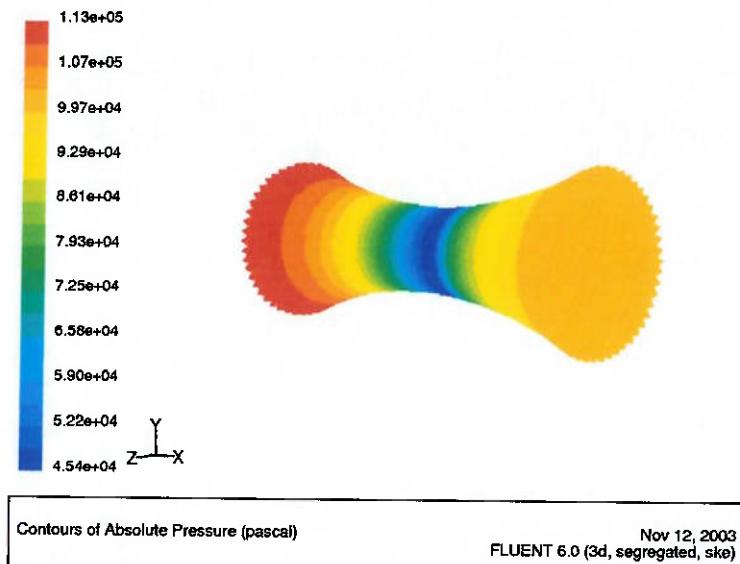


Figura 4.5: Contorno de pressão

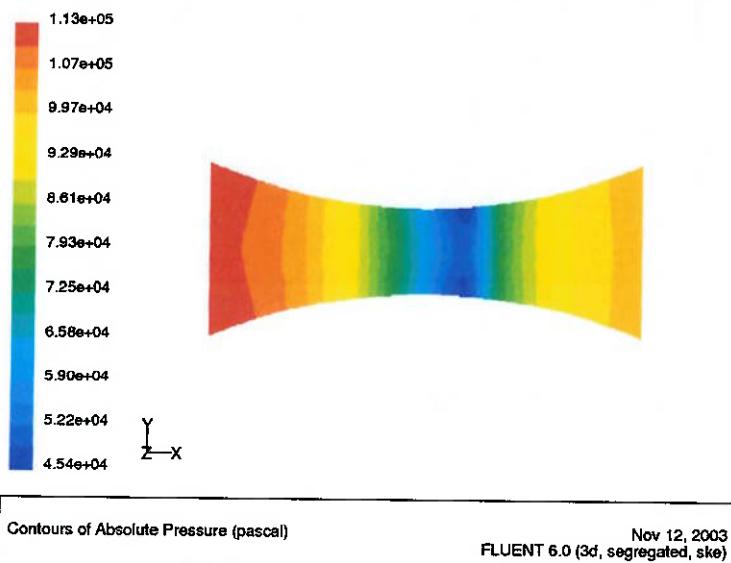


Figura 4.6: Corte mostrando o contorno de pressão

5. Na figura 4.20, é possível notar que a temperatura não varia muito, comparanda com as outras quantidades físicas.

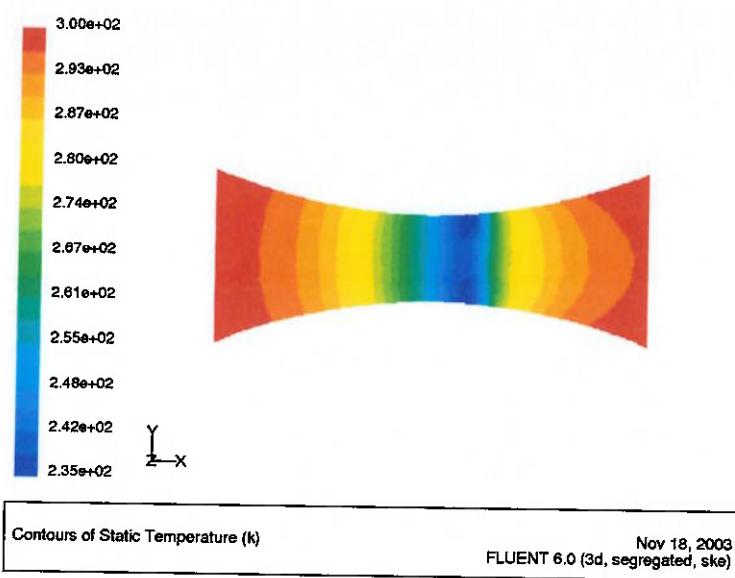


Figura 4.7: Corte mostrando o contorno de temperatura

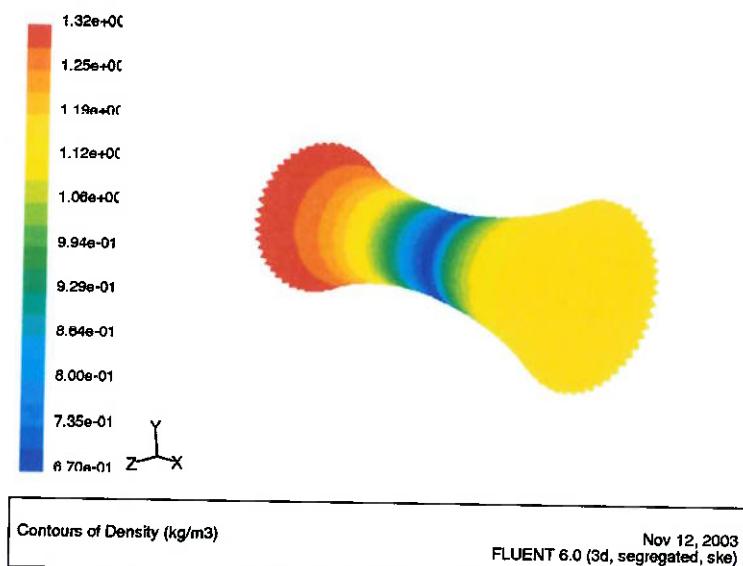


Figura 4.8: Contorno de densidade

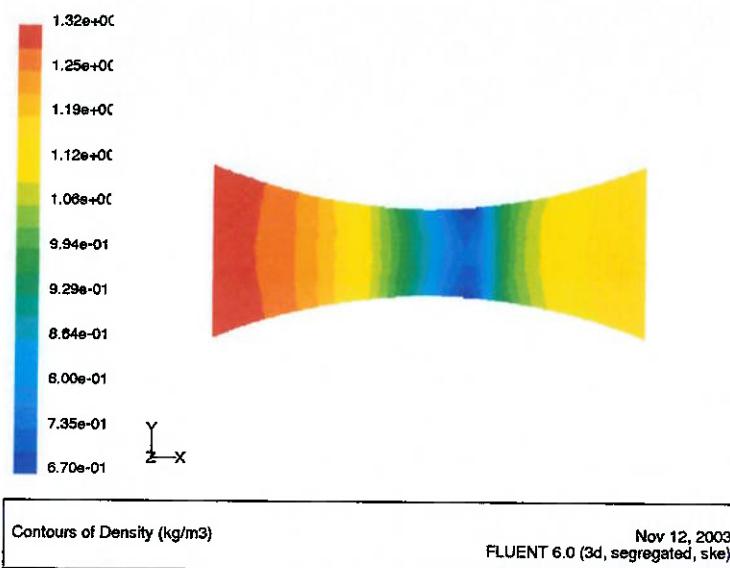


Figura 4.9: Corte mostrando o contorno de densidade

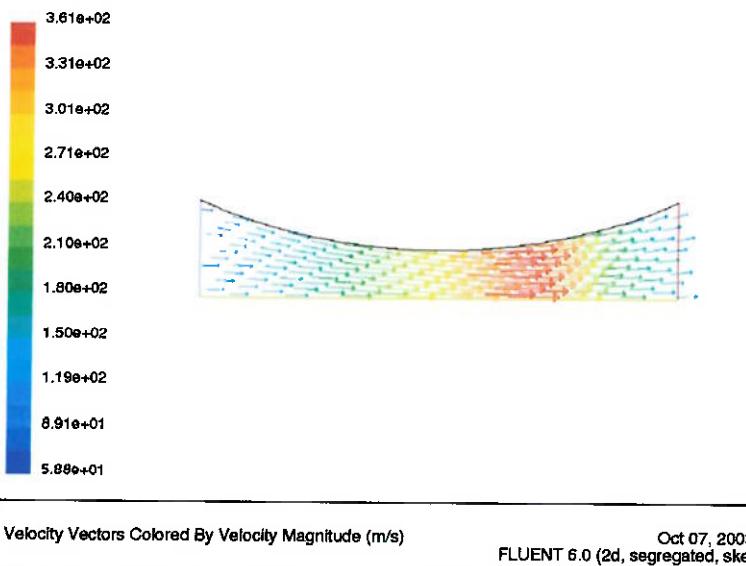


Figura 4.10: Vetores de velocidades - Bidimensional

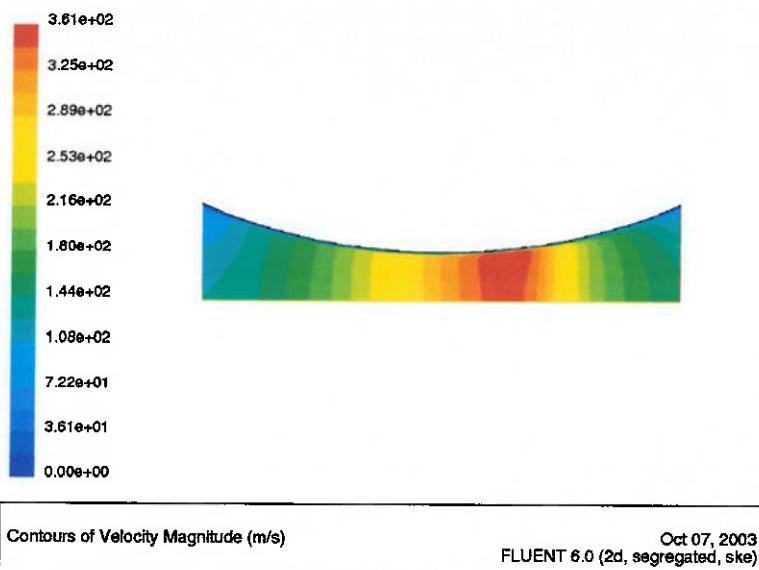


Figura 4.11: Campo de velocidades - Bidimensional

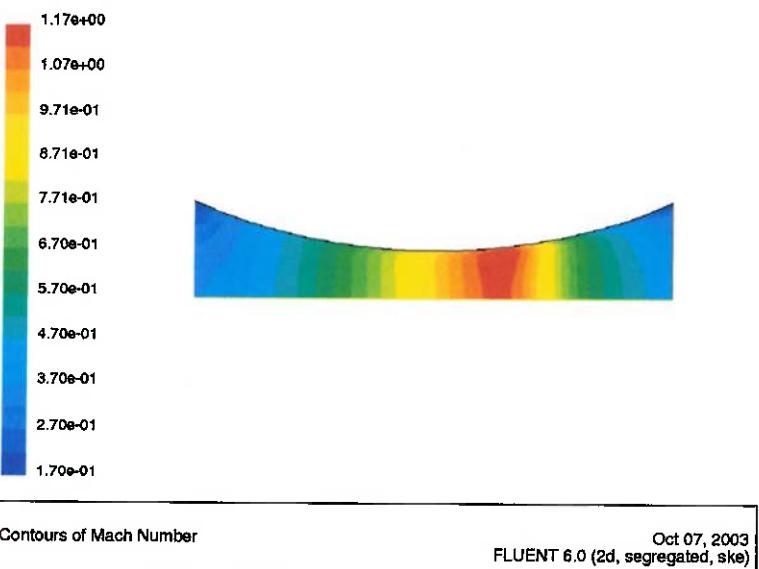


Figura 4.12: Número de Mach - Bidimensional

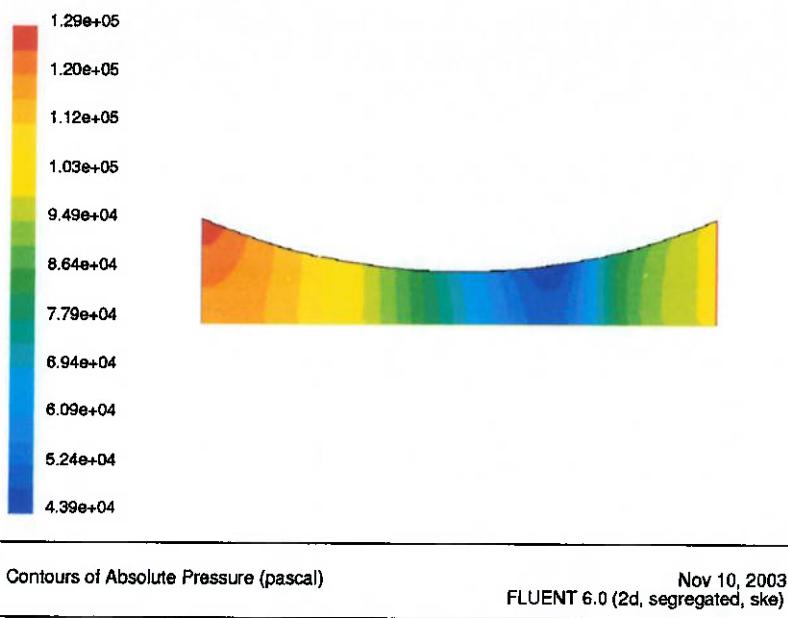


Figura 4.13: Campo de pressão - Bidimensional

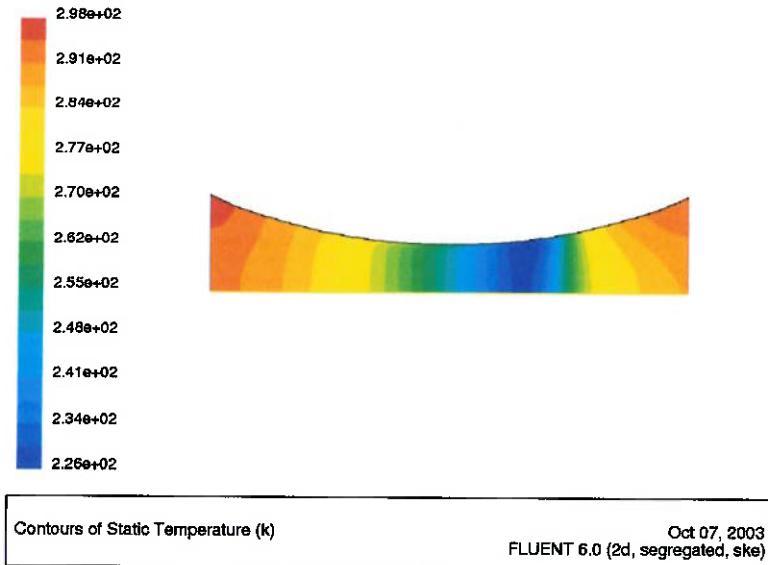


Figura 4.14: Campo de temperatura - Bidimensional

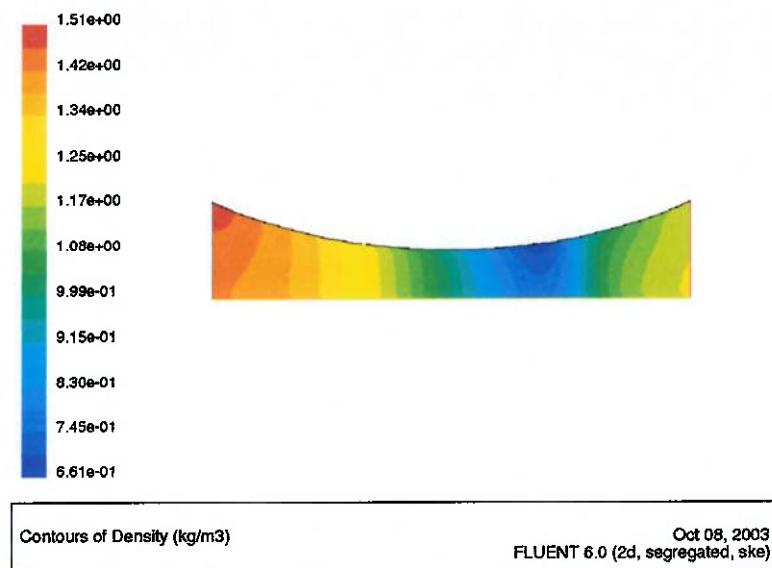


Figura 4.15: Campo de densidade - Bidimensional

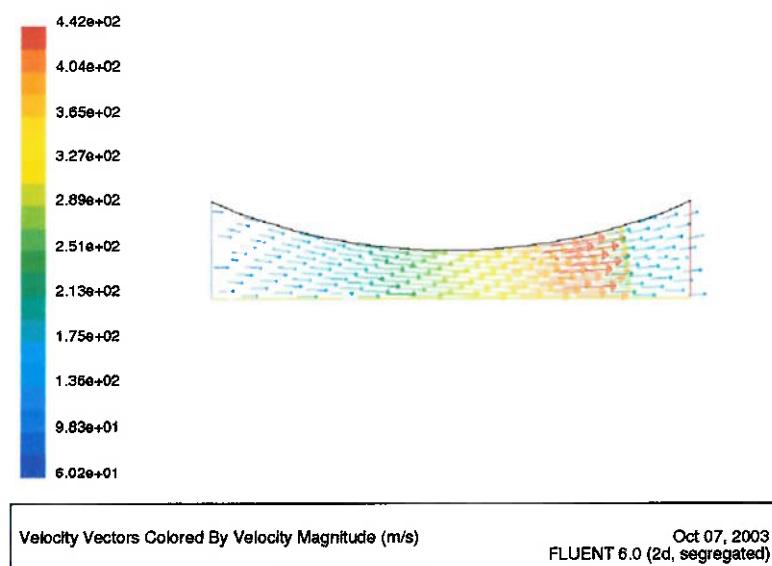


Figura 4.16: Vetores de velocidades - Bidimensional

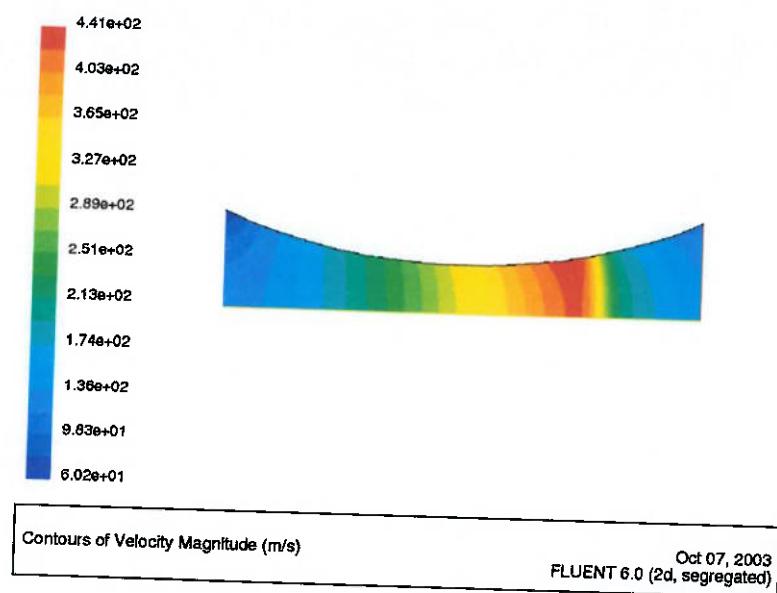


Figura 4.17: Campo de velocidades - Bidimensional

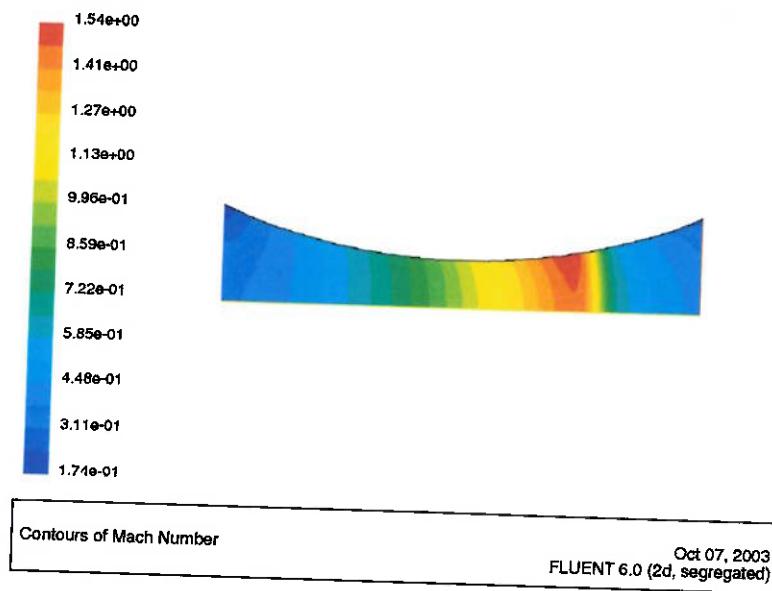


Figura 4.18: Número de Mach - Bidimensional

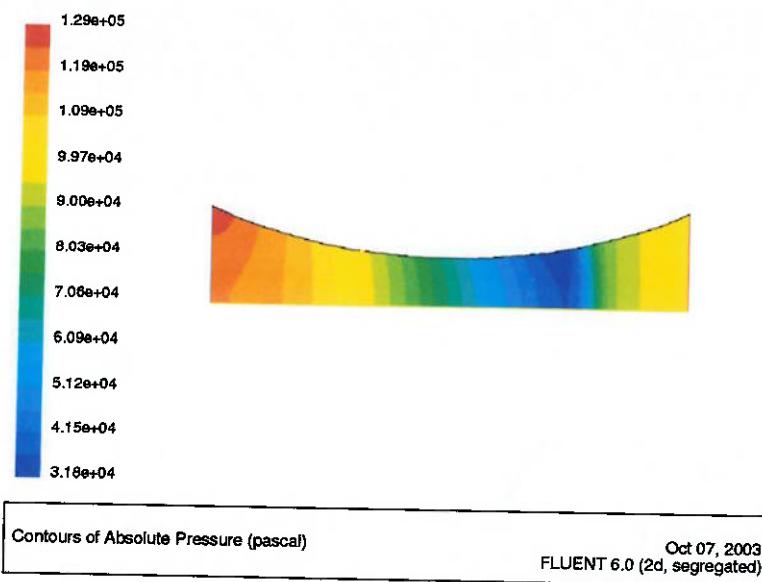


Figura 4.19: Campo de pressão - Bidimensional

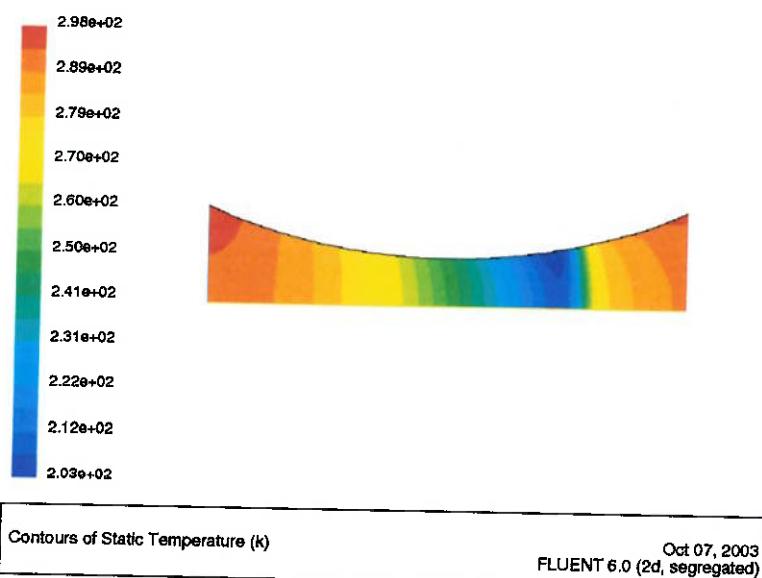


Figura 4.20: Campo de temperatura - Bidimensional

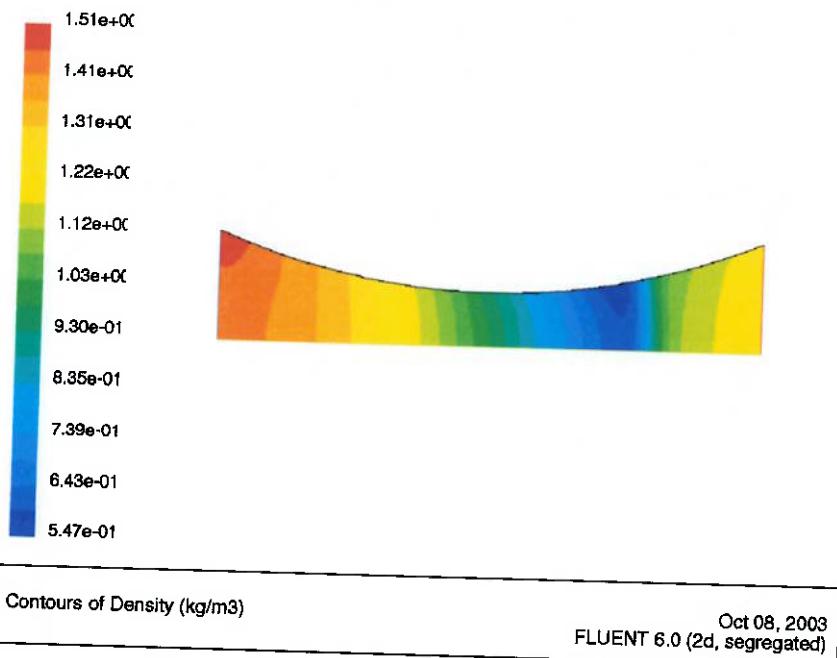


Figura 4.21: Campo de densidade - Bidimensional

Como é possível observar pelas figuras (4.10 a 4.21), a diferença entre um escoamento invíscido e viscoso não é muito significante, para esta magnitude de velocidade, pois a camada limite não descola da parede. Assim, pode-se modelar o escoamento como invíscido sem acarretar em grandes erros. A hipótese a ser testada a seguir é a de escoamento unidimensional. Como mostrado nas figuras 4.22 e 4.23, a variação da componente vertical da velocidade é desprezível, frente à componente paralela ao eixo das abscissas:

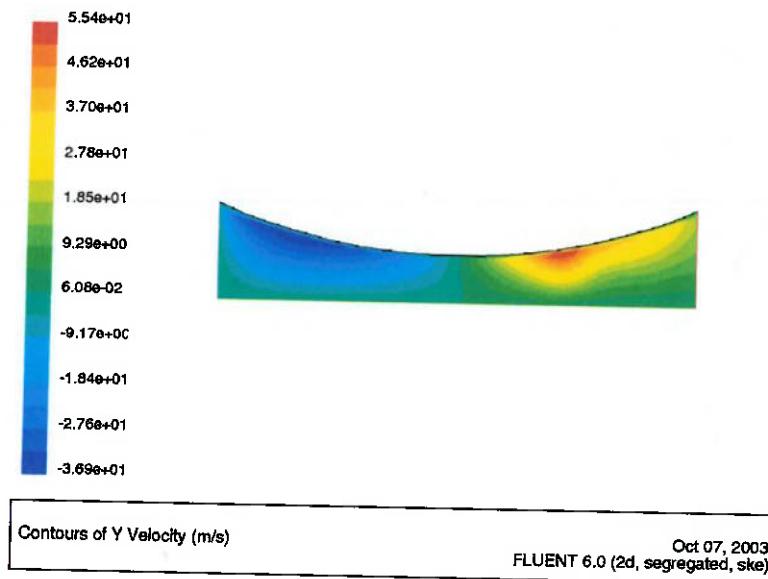


Figura 4.22: a variação de v_y , escoamento viscoso

Então, é possível modelar o escoamento como sendo unidimensional invíscido, como segue. A qualidade da solução não foi muito prejudicada, já que os resultados são muito parecidos com os do caso bidimensional e viscoso.

A tabela 4.1 mostra a comparação entre os 4 casos simulados acima. É claro que com os computadores que se dispõe hoje em dia esses valores de tamanho da malha não tem muito impacto no desempenho da máquina, porém com a introdução de mais parâmetros, como combustão e radiação, essas simplificações podem se tornar muito úteis, já que o prazo para se fazer a análise de um problema não é muito grande, necessitando de resultados confiáveis, e em pouco tempo.

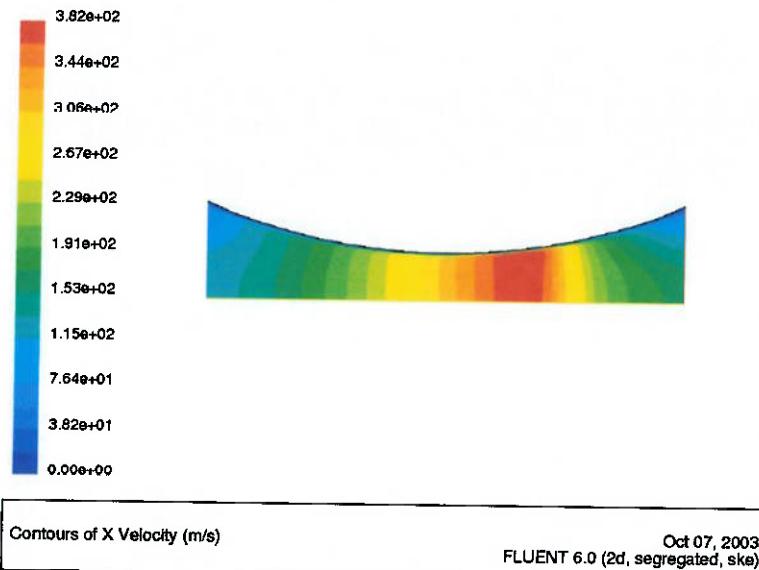


Figura 4.23: Esta figura mostra a variação de v_x , escoamento viscoso

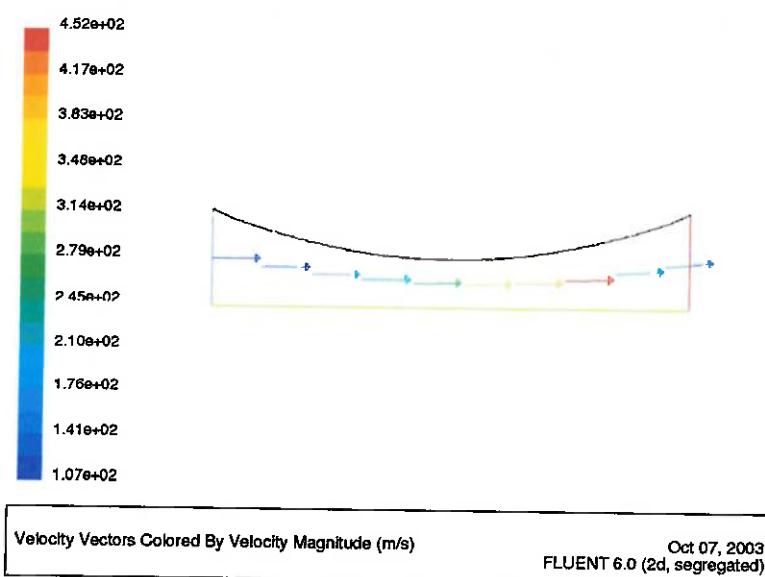


Figura 4.24: Esta figura mostra os vetores de velocidades - Quasi-unidimensional

4.2 Validação

4.2.1 Análise Integral

Um dos aspectos mais importantes relacionadas com a CFD diz respeito à realizabilidade das soluções. As únicas soluções que interessam são as que representam esco-

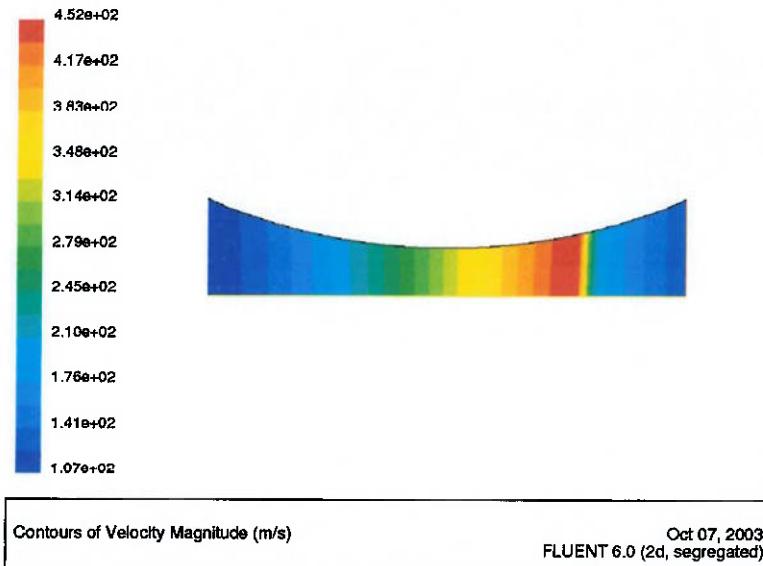


Figura 4.25: Esta figura mostra o campo de velocidades - Quasi-unidimensional

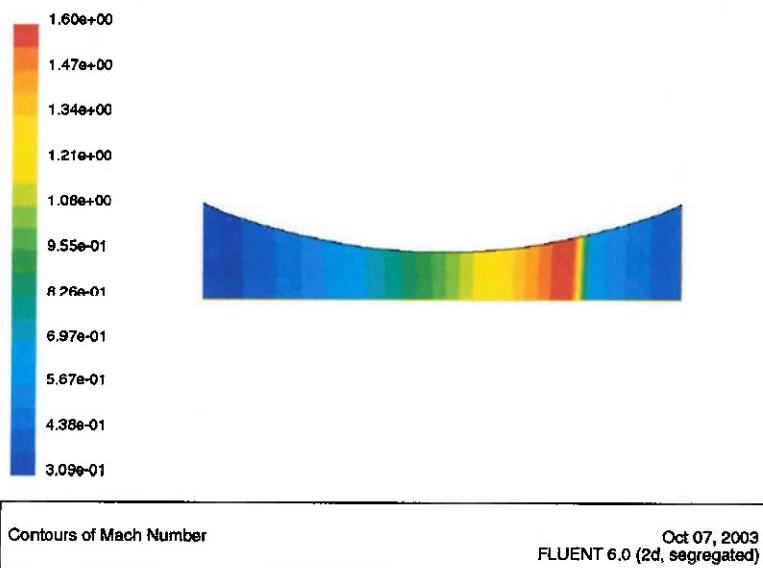


Figura 4.26: Esta figura mostra o número de Mach - Quasi-unidimensional

amentos reais, isto é, que satisfazem os princípios fundamentais da termodinâmica e da dinâmica dos fluidos. Conforme as simulações não são livres de erros, convém sempre verificar sua consistência com relação a esses princípios, através da análise integral. No caso presente, foi verificada a conservação da massa para o regime permanente, apresentada na fig. 4.30 e a conservação da energia, representada pela

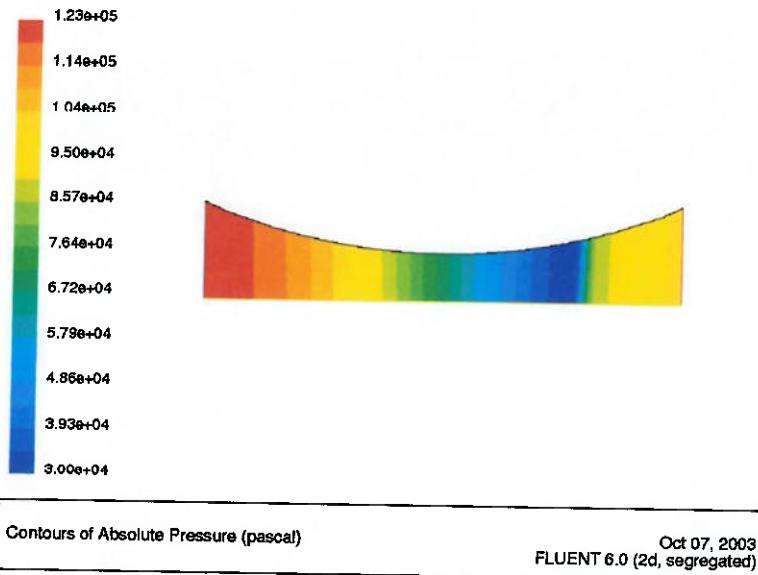


Figura 4.27: Esta figura mostra o campo de pressão - Quasi-unidimensional

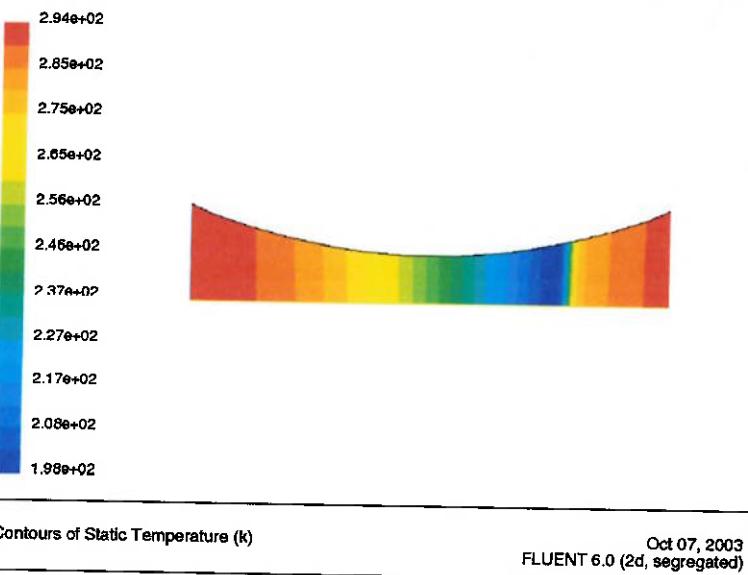


Figura 4.28: Esta figura mostra o campo de temperatura - Quasi-unidimensional

conservação da entalpia de estagnação (fig. 4.30). A figura 4.30 mostra os resultados do balanço de massa e energia para um resultado de uma simulação, utilizando o software do aluno. Pode se notar nessa figura, que tanto a conservação da massa como a entalpia de estagnação apresentam um erro maior na posição da onda de choque. Entretanto esse comportamento era esperado, pois está relacionado ao fenômeno

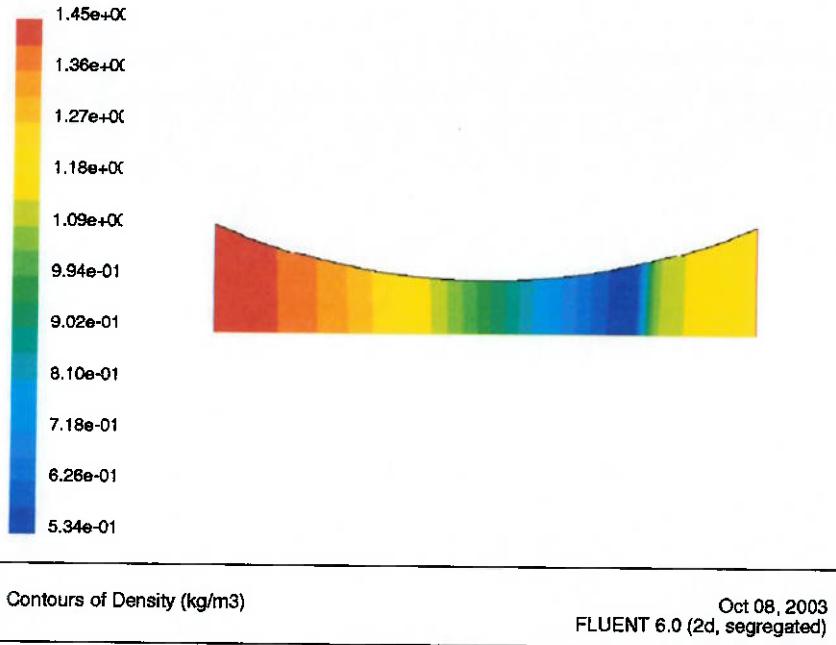


Figura 4.29: Esta figura mostra o campo de densidade - Quasi-unidimensional

Caso	Tamanho da Malha (kb)	Número de nós	Tempo de simulação (min)
3D	3317	42662	12
2D $k-\epsilon$	171	2060	2
2D	171	2060	1.3
Quasi-1D	27	200	0.8

Tabela 4.1: Impactos da simplificação do modelo

conhecido como *shock smearing* [4].

Outra análise importante é a conservação da quantidade de movimento. Essa é feita através da comparação da integração da pressão em todo o domínio, e comparando o resultado com a aplicação do teorema do transporte de Reynolds (2.7) para a quantidade de movimento.

$$Empuxo = mp * (V_s - V_e) + P_e * S_e - P_s * S_s \quad (4.1)$$

na qual os índices s e e dizem respeito à saída e entrada, respectivamente.

Comparando-se os resultados na tabela 4.2, pode-se concluir que o erro é da

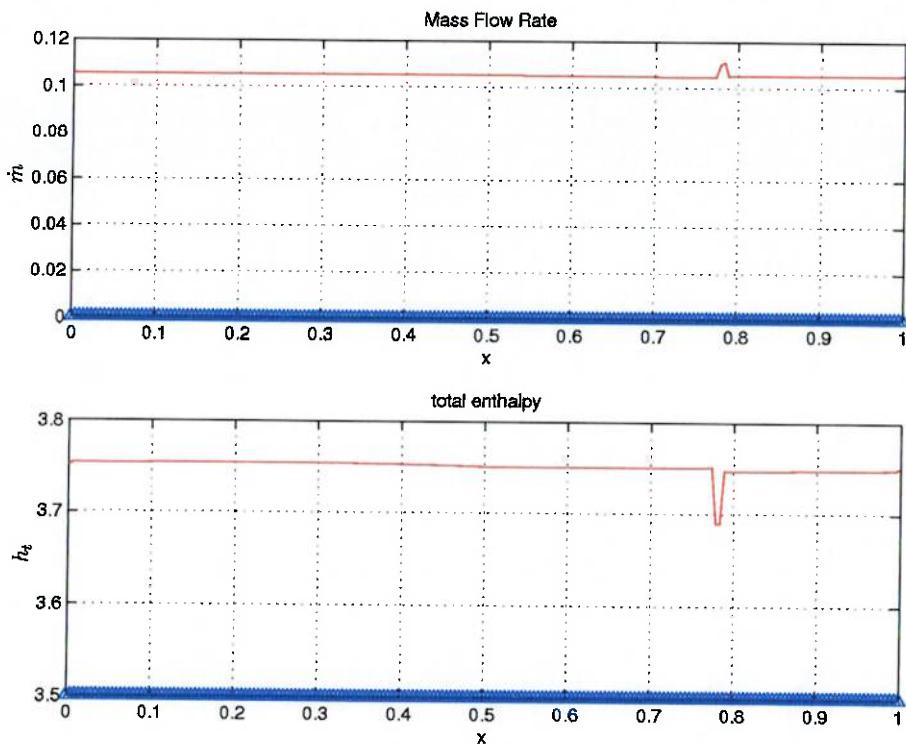


Figura 4.30: Estas figuras mostram o fluxo de massa e a entalpia de estagnação-Software do aluno

Método	Empuxo
Integração da Pressão	0.13734
Equação 4.1	0.13715

Tabela 4.2: Conservação da Quantidade de Movimento

ordem de 10^{-4} , enquanto que a precisão especificada nessa simulação é da ordem de 10^{-3} . O empuxo foi apresentado aqui sem uma unidade correspondente, já que como as grandezas envolvidas no problema são adimensionalizadas, o empuxo em si também se torna adimensional.

Assim, conclui-se a análise integral, e nos três critérios (Conservação da Massa, Energia e Quantidade de Movimento) os resultados foram satisfatórios.

4.2.2 Simulação

Como exemplo prático da aplicação de simulação numérica do escoamento compressível, vamos considerar um bocal com a geometria indicada na figura 4.31, a mesma apresentada anteriormente (Figuras 4.24 a 4.29), onde o eixo das abscissas é um eixo de simetria. Esse é submetido a uma condição de partida, *i.e.*, pressão, temperatura e densidade uniformes*, velocidade e número de Mach iguais a zero em todo o domínio do escoamento. Na seção de entrada, empõe-se Mach igual 0.6. O escoamento é considerado quasi-unidimensional (quasi-1D), ou seja, admite-se que a geometria é suave o bastante para que as velocidades perpendiculares ao eixo de simetria sejam desprezíveis com relação às velocidades paralelas ao eixo. Este caso foi simulado com um programa feito na linguagem C pelo aluno, desenvolvido no âmbito deste trabalho.

A apresentação dos resultados foi feita utilizando o Matlab. As figuras 4.31–4.30 mostram a evolução do escoamento, da condição inicial ao regime permanente. Em todas as figuras, a condição inicial é indicada por triângulos azuis, e a condição de regime permanente é representada por linhas vermelhas. Alguns resultados são mostrados para o regime transitório, e eles são representados por linhas nas cores azul claro, rosa e verde, que indicam a passagem do tempo. A figura 4.31 mostra a geometria do bocal e o perfil do número de Mach do escoamento.

Pode-se notar na fig. 4.31, que na solução para o regime permanente o número de Mach é 1 na garganta, que é o resultado previsto pela Termodinâmica do Escoamento Compressível. Além disso, verifica-se que o escoamento subsônico é acelerado pela porção convergente do bocal, torna-se sônico na garganta, e por isso continua a ser acelerado na porção divergente. Após a onda de choque, torna-se subsônico e, portanto, passa a ser desacelerado. Esses resultados também confirmam o comportamento previsto na teoria.

A figura 4.32 mostra os perfis de pressão e velocidade, os perfis de temperatura

*Todas as grandezas são adimensionalizadas

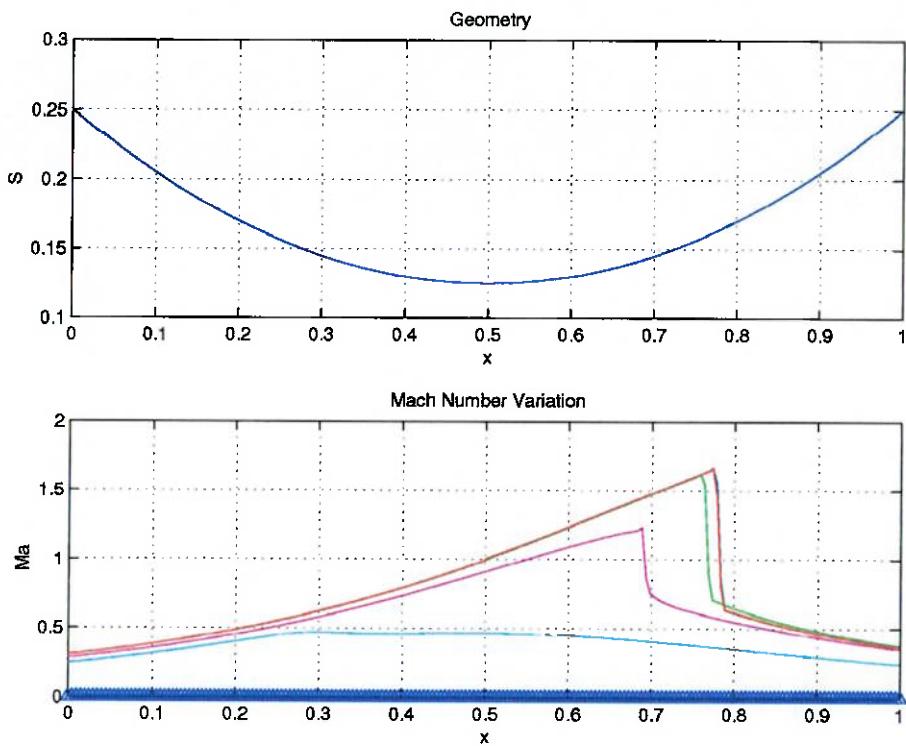


Figura 4.31: Estas figuras mostram a geometria e a variação do número de Mach e densidade são apresentados na figura 4.33 abaixo.

Pegando como referência a pressão ambiente de $p = 100.000 Pa$, a densidade do ar à 20°C nessa pressão, $\rho = 1.178 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ e também uma velocidade de referência $u = 220 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, pode-se efetuar a comparação dos resultados simulados com o software comercial FLUENT e o software de simulação utilizado nesse projeto.

Como as grandezas utilizadas no software de simulação são adimensionalizadas, é possível perceber que os valores mostrados nas figuras 4.31 à 4.30 são aproximadamente iguais aos apresentados nas figuras 4.24 a 4.29 acima, indicando que a simulação do escoamento com o software de simulação está compatível com o software comercial.

Isto somente não é o bastante para comprovar que a simulação está correta, já que os software comerciais apresentam soluções numéricas que nem sempre representam a realidade, e a qualidade do resultado depende muito do usuário. Um meio eficaz de se comprovar a qualidade de uma solução é o balanço de massa (equação da

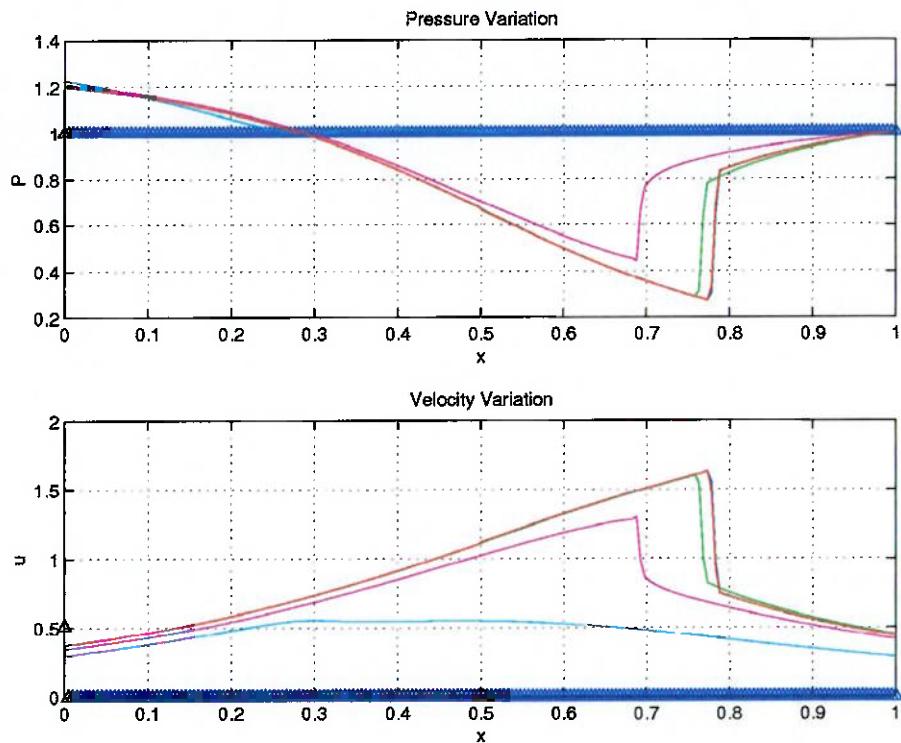


Figura 4.32: Estas figuras mostram as variações da pressão e da velocidade (continuidade) e conservação de energia, e os resultados de ambas as simulações são compatíveis.

Portanto, as hipóteses adotadas na simulação de um bocal neste trabalho são verdadeiras, ou seja, escoamento quasi-unidimensional e fluido termica e caloricamente perfeito.

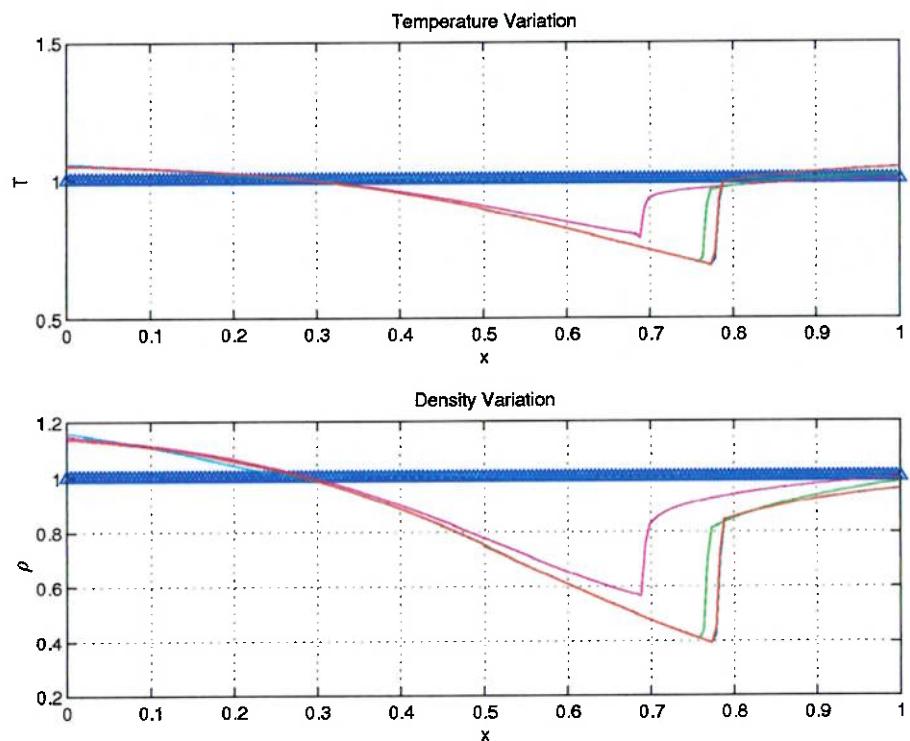


Figura 4.33: Estas figuras mostram a variação da temperatura e da densidade

Capítulo 5

Simulações

Bocais propulsores de foguetes e motores de aviões a jato são utilizados para se obter velocidades grandes na saída, às vezes maiores do que a velocidade do som, para obter maiores empuxos. Por outro lado, bocais podem tirar proveito do efeito de blocagem, para se obter um meio de regular a vazão.

A figura 5.1 mostra as condições de operação possíveis, para um bocal convergente - divergente (figura 2.1) e entrada subsônica.

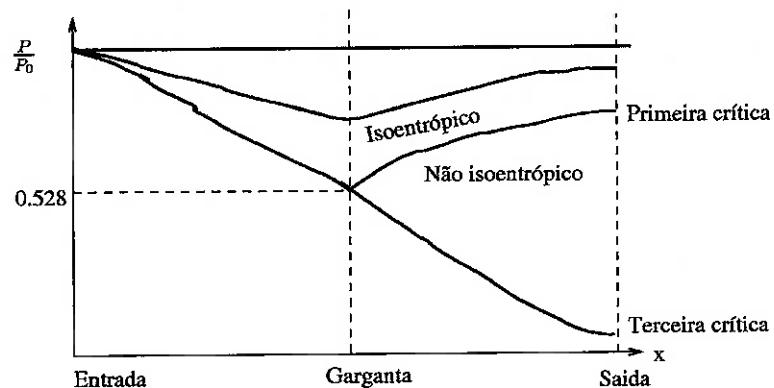


Figura 5.1: Condições de operação de um bocal convergente-divergente

Conforme [9], Partindo-se de uma pressão na saída igual à pressão de entrada no bocal, não há escoamento. Diminuindo-se a pressão à jusante, o escoamento inicia no regime subsônico, e acelera da entrada para a garganta, atingindo a velocidade máxima nessa seção, e desacelera novamente. O bocal atua como um difusor e a pressão na saída, P_3 , é igual à pressão à jusante. Além do mais, o escoamento através

de toda a extensão do bocal é regido pelo valor da pressão à jusante.

Esta situação é mantida, até que a pressão à jusante atinge o valor $\frac{P_3}{P_{0_3}}$, correspondente à operação denominada de *primeira crítica*. Então, a velocidade na garganta atinge a velocidade do som ($Ma_2 = Ma^* = 1$), e as condições nessa seção são chamadas de críticas ($A_2 = A_2^*$)[†], porém o escoamento na saída ainda é subsônico. Esta é a condição limite para a consição de um difusor subsônico. Nesta condição a garganta é dita blocada, e as condições do escoamento na porção convergente do bocal são fixas, e não mudam com a diminuição da pressão à jusante. É importante notar que a partir desse ponto a vazão mássica é fixa, e representa o maior valor possível[‡].

Em última análise, uma onda de choque é uma descontinuidade e pode ser considerada infinitesimal, já que o tamanho real é de alguns caminhos livres médios**. É importante observar que esta é a razão da oscilação nos gráficos de vazão mássica dos bocais que apresentam uma onda de choque. Como essa onda é uma descontinuidade, deveria ser modelada em apenas uma célula, porém os métodos não são capazes e espalham a onda em duas ou três células, ocasionando essa pequena discrepância.

Até a condição de primeira crítica, o escoamento por todo o bocal é isoentrópico. Porém ao baixar ainda mais a pressão à jusante, além da condição de primeira crítica, uma acomodação terá que acontecer na parte divergente do bocal, pois as condições na parte convergente, até a garganta, são fixas e não se alterarão. Esta acomodação de pressão vem na forma de uma onda de compressão, chamada de onda de choque, e a operação do bocal não é mais isoentrópica. Através dessa onda de choque, o escoamento que era supersônico torna-se subsônico, com uma recuperação de pressão.

Finalmente, quando a pressão à jusante é diminuída até a condição de *terceira*

[†]A propriedade indicada por * é referente ao número de $Ma = 1$

[‡]Para a condição de entrada supersônica

^{**}Um caminho livre médio é da ordem de $10^{-7}m$

crítica ($\frac{P_3}{P_{03}} = 0.064$), nesse caso, o escoamento é completamente isoentrópico, e acelera de velocidades subsônicas baixas na entrada até altas velocidades supersônicas na saída. Esta operação não apresenta uma onda de choque, e é a condição de projeto de bocais a propulsão.

Se a pressão for diminuída além da terceira crítica, o fluido sofrerá alterações somente após deixar o bocal, pois as condições de operação estão fixas. Vale a pena ressaltar que ondas de choque podem ser úteis em bocais dosadores de vazão, nos quais não se quer velocidades altas na saída, porém deseja-se obter uma vazão mássica fixa.

Levando isso em conta, quatro casos de interesse serão apresentados e analisados a seguir. As geometrias utilizadas, bem como as condições de contorno são apresentadas na tabela 5.1. Em primeiro lugar, uma geometria convergente é simulada, obtendo-se os gráficos das figuras 5.2 a 5.5, somente para a solução de regime permanente.

Bocal	Geometria	u_{entrada}
1	$S(x) = -0.125x + 0.25$	0.4
2	$S(x) = 0.125x + 0.125$	0.3
3	$S(x) = x^2 - x + 0.35$	0.8
4	$S(x) = x^2 - x + 0.35$	0.3
5	$S(x) = \begin{cases} 0.2 + 4 * (x - 0.2)^2, & \text{se } x < 0.2 \\ 0.2 + 0.5 * (x - 0.2)^2, & \text{se } x \geq 0.2 \end{cases}$	0.3
6	$S(x) = \begin{cases} 0.2 + 4 * (x - 0.2)^2, & \text{se } x < 0.2 \\ 0.2 + 0.5 * (x - 0.2)^2, & \text{se } x \geq 0.2 \end{cases}$	0.75

Tabela 5.1: Geometrias e condições de contorno para os bocais simulados

É possível observar que $Ma = 1$ na saída do bocal, que é a seção chamada de garganta, já que possui a menor área. Como o bocal está bloqueado, não é possível aumentar a velocidade de saída diminuindo a pressão de saída, e o bocal atingiu a

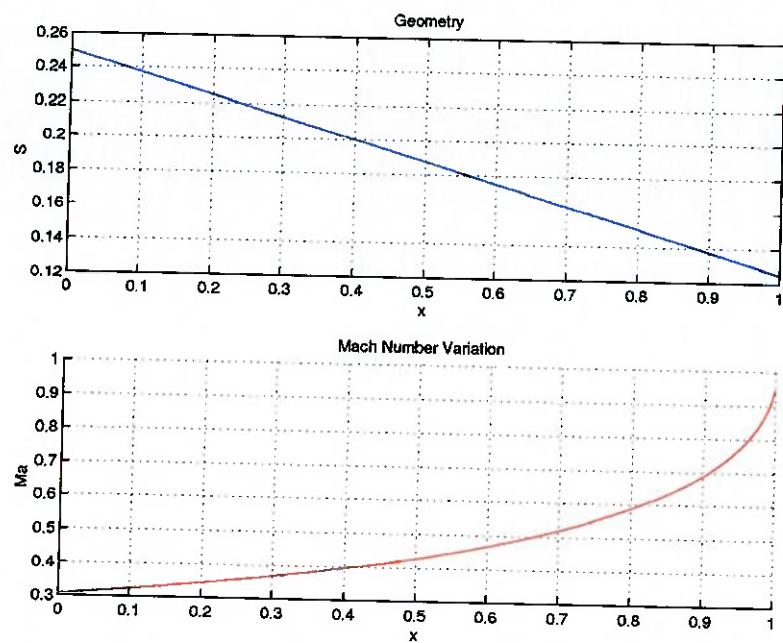


Figura 5.2: Bocal 1 -Geometria e a variação do número de Mach

condição de máximo empuxo para estas dadas condições.

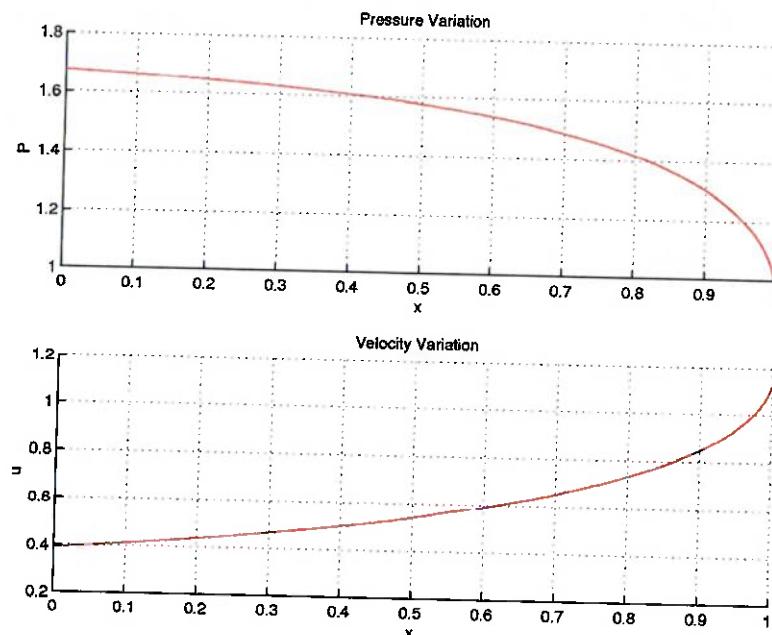


Figura 5.3: Bocal 1 - Pressão e Velocidade

O próximo teste é de um bocal com geometria divergente e entrada supersônica.

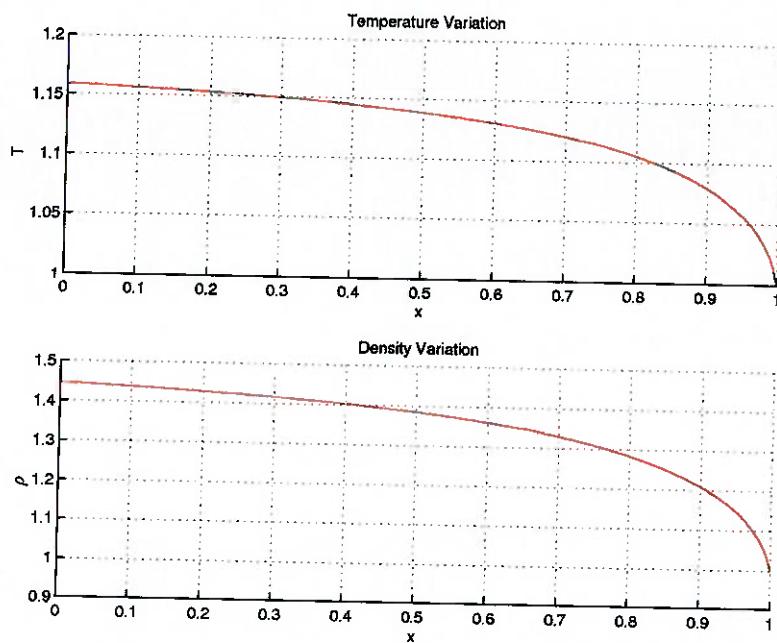


Figura 5.4: Bocal 1 - Temperatura e Densidade

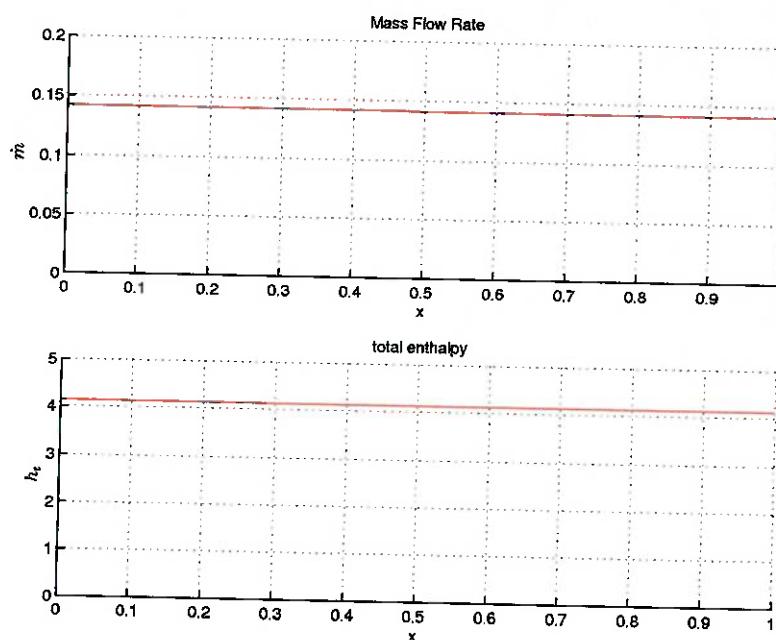


Figura 5.5: Bocal 1 - Fluxo de massa e Entalpia de estagnação

É observado uma aceleração do fluido até que uma onda de choque acontece, e a partir de então, o escoamento se torna subsônico, e ocorre uma desaceleração. Este

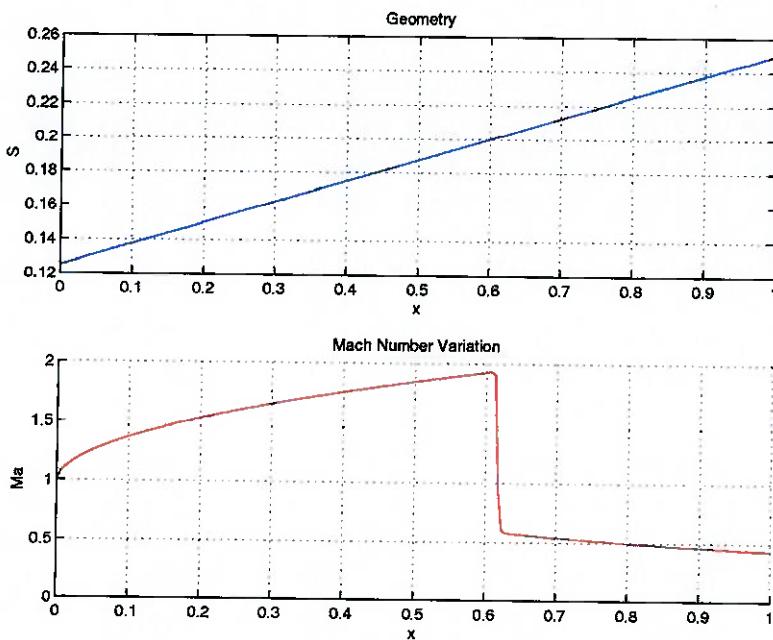


Figura 5.6: Bocal 2 - Geometria e a variação do número de Mach

tipo de bocal não é uma boa alternativa ao bocal convergente para se obter maiores velocidades, pois se a entrada for subsônica, haverá apenas uma diminuição da velocidade. Se, caso contrário, a entrada for supersônica, a velocidade de saída poderá ser maior do que a de entrada, porém obter uma entrada supersônica, atingida pelo aquecimento do fluido (escoamento de Rayleigh), por exemplo, não constitui uma boa solução já que em tubulações pretende-se obter a menor perda de carga possível. Assim, a aceleração do fluido é preferencialmente feita em curtos espaços.

Bocais do tipo convergente-divergente (figuras 5.10 a 5.13) foram desenvolvidos, com o propósito de se aproveitar os gases provenientes da queima de algum combustível, que gera altas temperatura e pressão, e expeli-lo através desse bocal. Assim, consegue-se um fluxo de gás à alta velocidade pela saída, aumentando o empuxo e melhorando o seu desempenho. Este tipo de bocal é comumente encontrado em foguetes, aviões, shuttles ou VLS*.

Obviamente há riscos em se utilizar este tipo de bocal, pois se o bocal de pro-

*Veículo Lançador de Satélites

pulsão não for bem projetado, podem ocorrer ondas de choque em seu interior (figuras 5.14 a 5.17), e como a saída se tornará subsônica, o empuxo será muito diminuído. Isto emplica em perda de velocidade, ou até mesmo capacidade de sustentação da aeronave.

Para ressaltar como o projeto do bocal é importante, ao observar as figuras 5.18 a 5.25 representando os resultados da simulação dos bocais 5 e 6, é notada uma descontinuidade nos gráficos das propriedades, na seção da garganta. Isto é explicado com uma analogia partindo de um problema chamado *paredes rugosas*. Em [6], é mostrado que o coeficiente de pressão varia da seguinte forma, em paredes rugosas:

$$\text{Para } Ma > 1 \quad C_p = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dy}{dx}$$

$$\text{Para } Ma < 1 \quad C_p = \frac{2}{\pi \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{d^2y}{dx^2}$$

Fazendo uma analogia, as propriedades termodinâmicas também dependem da derivada de primeira ordem da geometria ($\frac{dy}{dx}$) para escoamento supersônico, e da derivada de segunda ordem da geometria ($\frac{d^2y}{dx^2}$) para o caso subsônico. Assim, se a geometria não é contínua até a segunda derivada, haverá descontinuidades como as apresentadas. Isto é importante, pois os bocais construídos em escala industrial não necessariamente apresentam esta continuidade. A tabela 5.1 mostra a equação da geometria S ao longo do comprimento do bocal, e os bocais 5 e 6 não apresentam derivadas de segunda ordem contínuas.

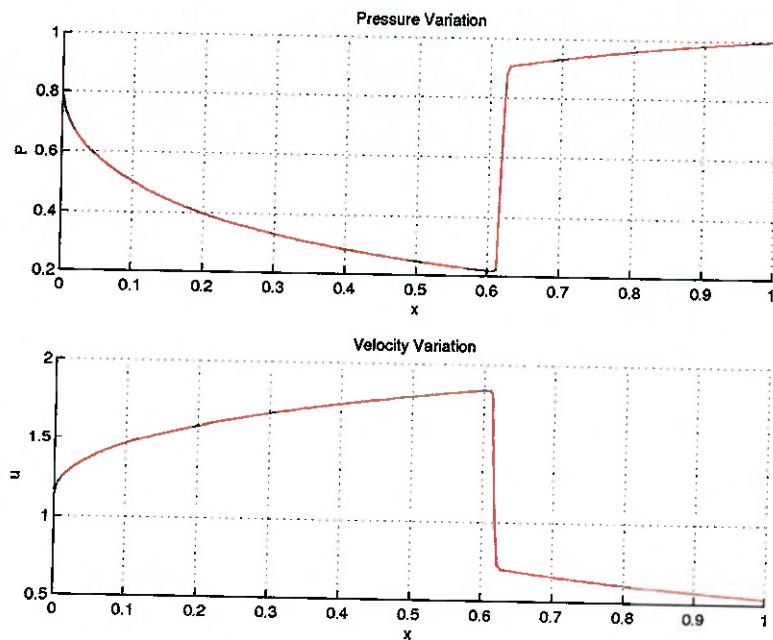


Figura 5.7: Bocal 2 - Pressão e Velocidade

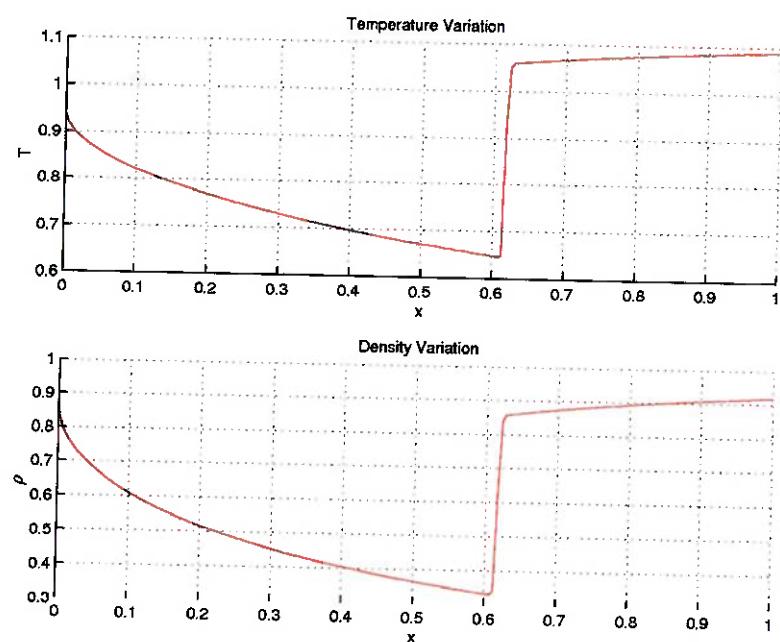


Figura 5.8: Bocal 2 - Temperatura e Densidade

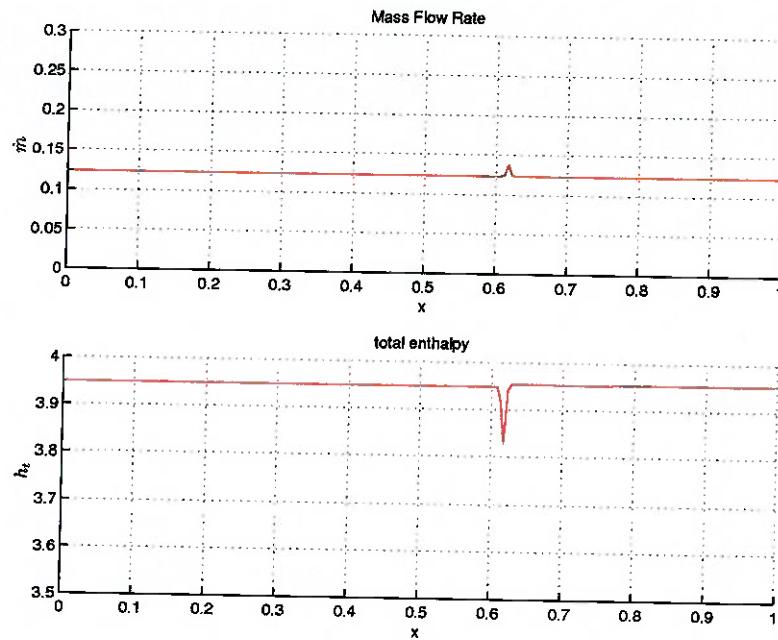


Figura 5.9: Bocal 2 - Fluxo de massa e Entalpia de estagnação

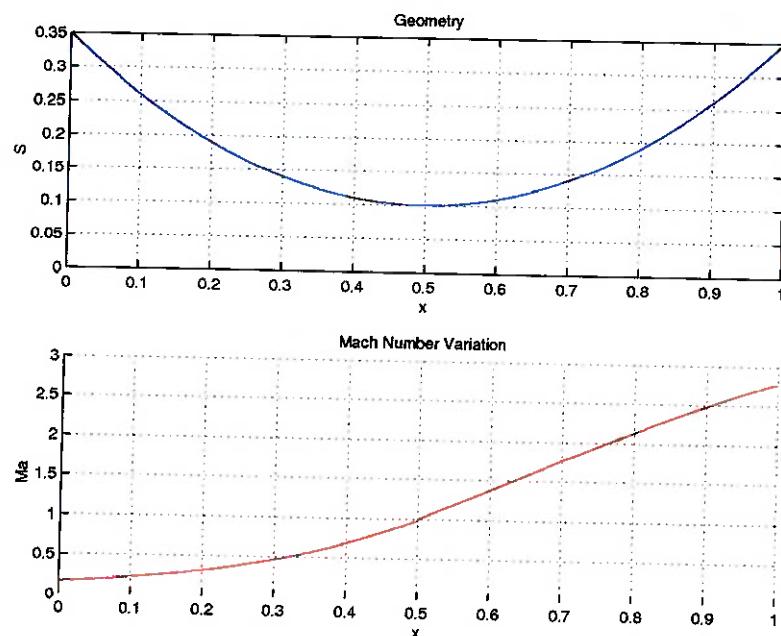


Figura 5.10: Bocal 3 - Geometria e a variação do número de Mach

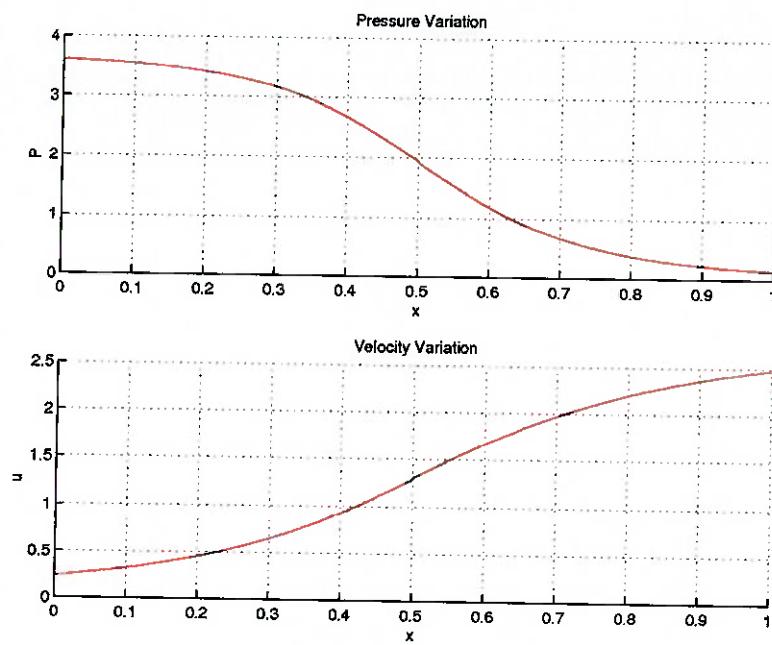


Figura 5.11: Bocal 3 - Pressão e Velocidade

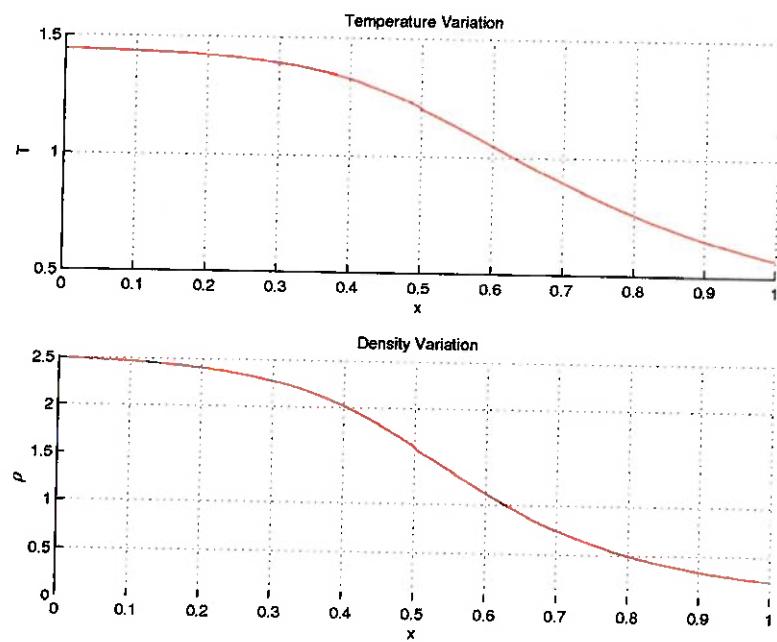


Figura 5.12: Bocal 3 - Temperatura e Densidade

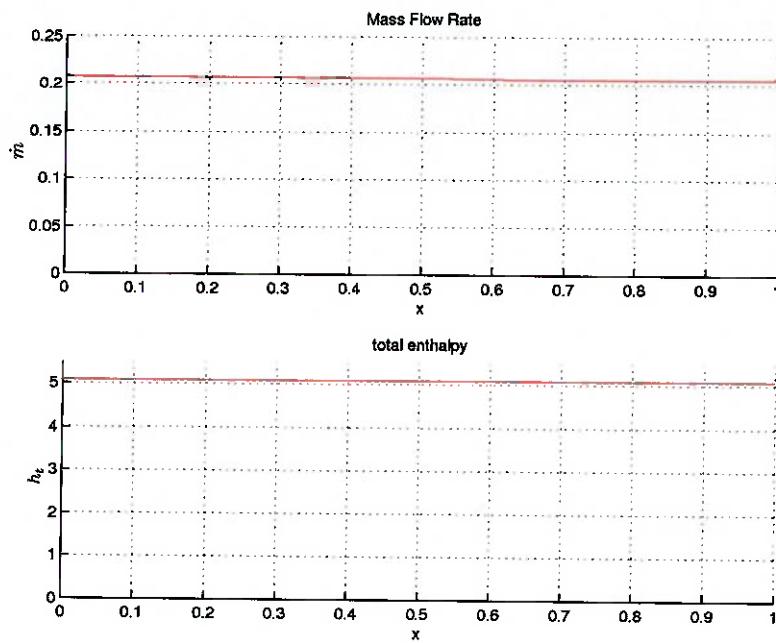


Figura 5.13: Bocal 3 - Fluxo de massa e Entalpia de estagnação

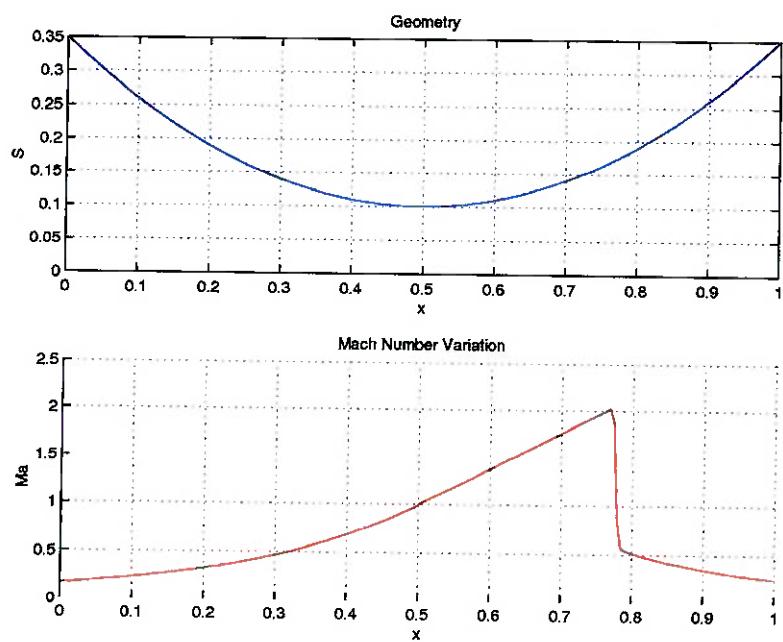


Figura 5.14: Bocal 4 - Geometria e a variação do número de Mach

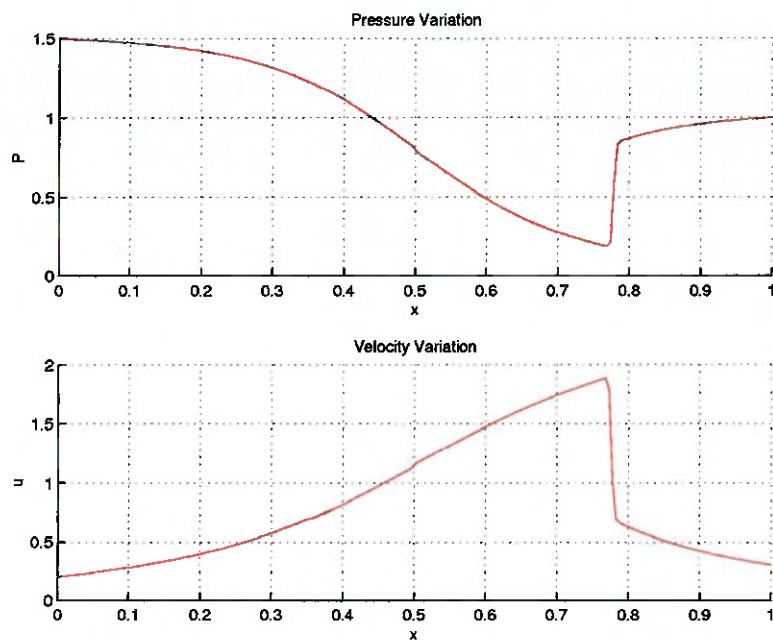


Figura 5.15: Bocal 4 - Pressão e Velocidade

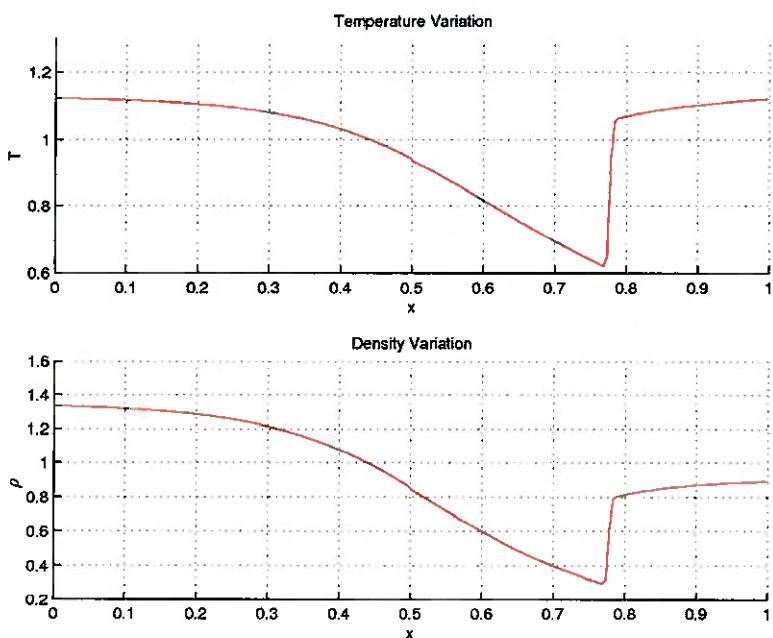


Figura 5.16: Bocal 4 - Temperatura e Densidade

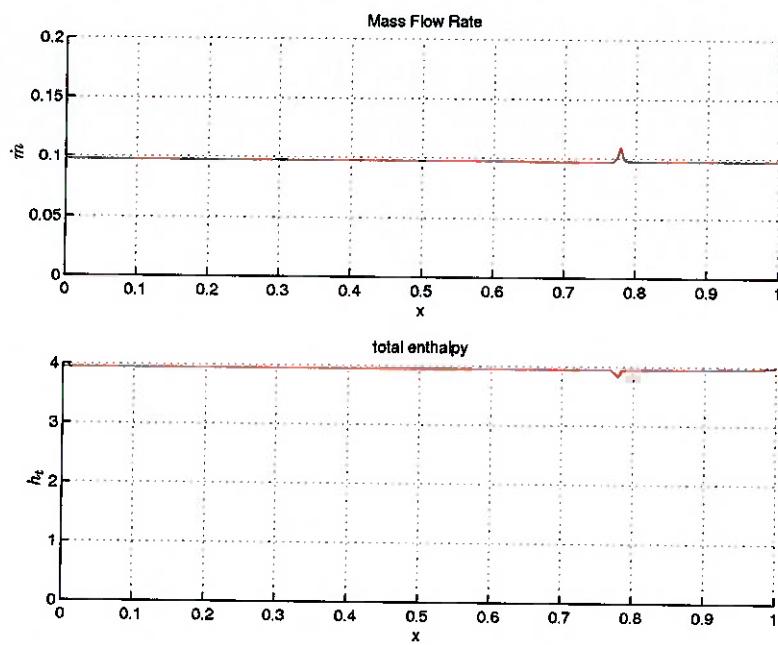


Figura 5.17: Bocal 4 - Fluxo de massa e Entalpia de estagnação

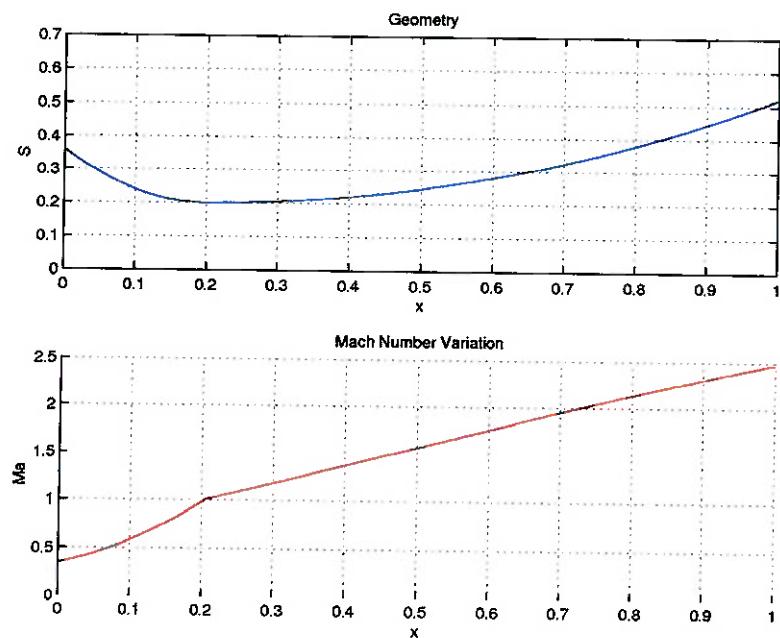


Figura 5.18: Bocal 5 - Geometria e a variação do número de Mach

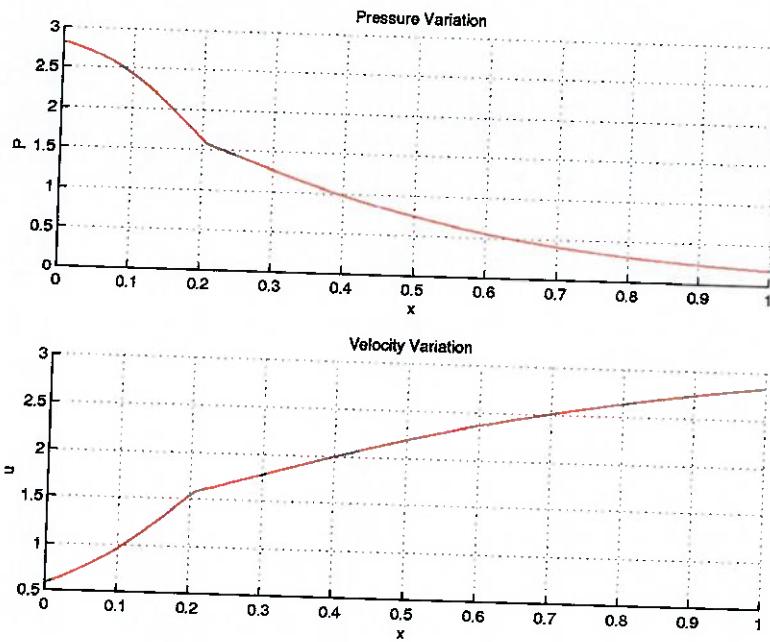


Figura 5.19: Bocal 5 - Pressão e Velocidade

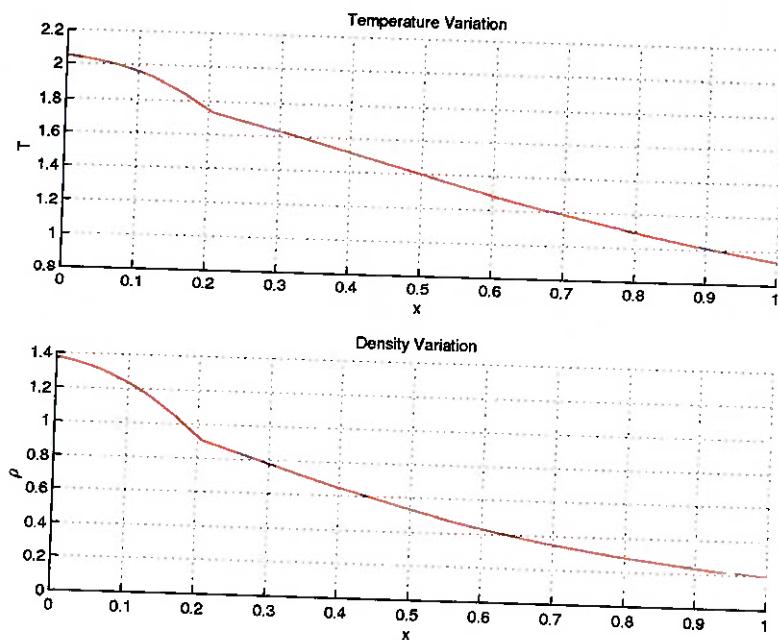


Figura 5.20: Bocal 5 - Temperatura e Densidade

Aplicando-se a equação 4.1 aos bocais simulados acima, obtém-se tabela 5.2. É possível observar que os efeitos de uma onda de choque para um bocal de propulsão

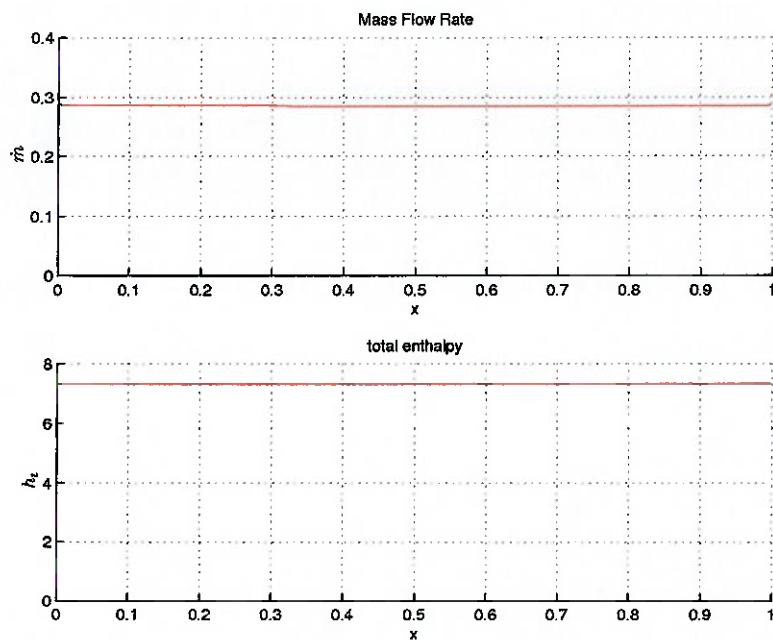


Figura 5.21: Bocal 5 - Fluxo de massa e Entalpia de estagnação

podem ser significativos. Na comparação entre os bocais 3 e 4, o empuxo diminuiu cerca de 4.5 vezes. Já nos bocais 5 e 6, o empuxo diminuiu cerca de 2 vezes. Considerando-se um foguete ou um avião, uma diminuição desta magnitude poderia causar graves instabilidades.

Bocal	Empuxo
1	0.191
2	0.074
3	0.746
4	0.163
5	0.267
6	0.123

Tabela 5.2: Empuxo dos bocais

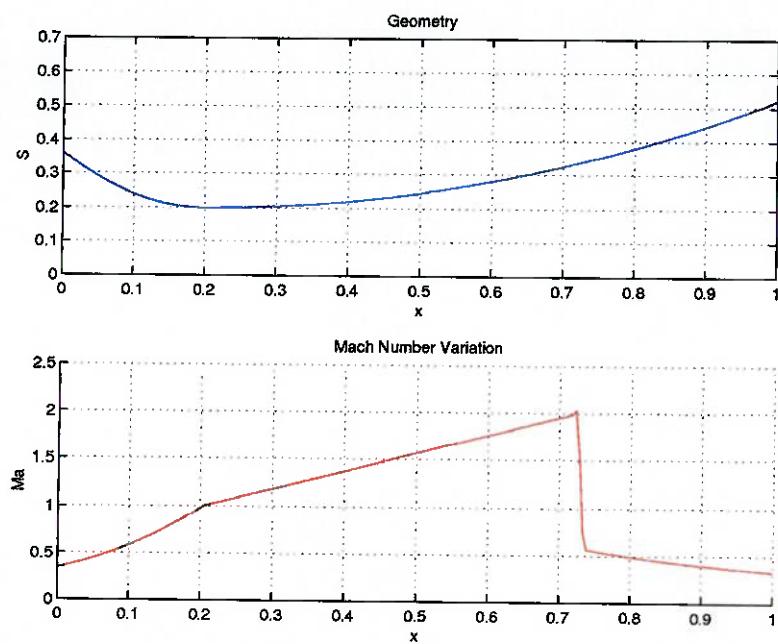


Figura 5.22: Bocal 6 - Geometria e a variação do número de Mach

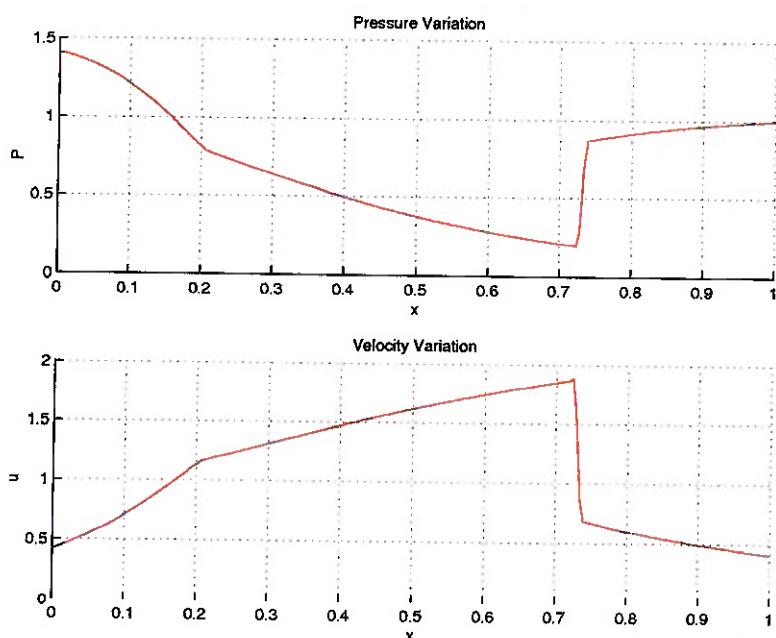


Figura 5.23: Bocal 6 - Pressão e Velocidade

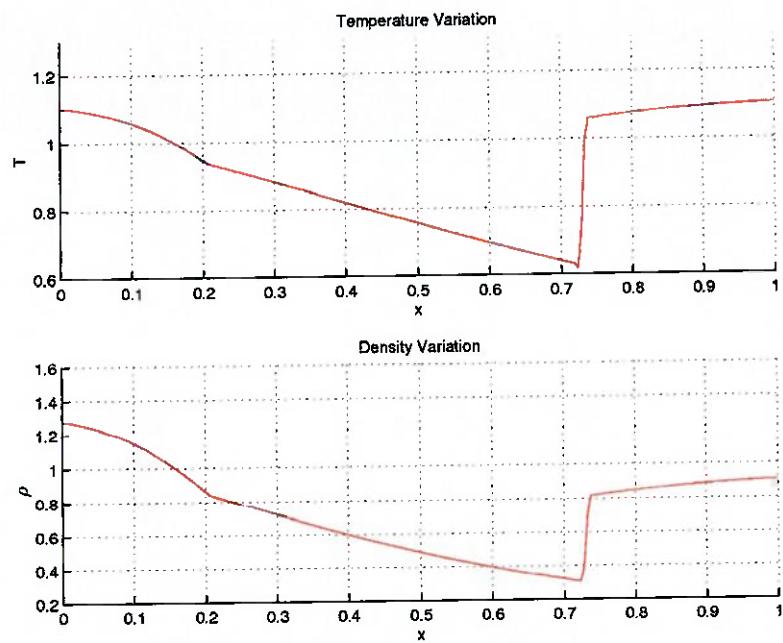


Figura 5.24: Bocal 6 - Temperatura e Densidade

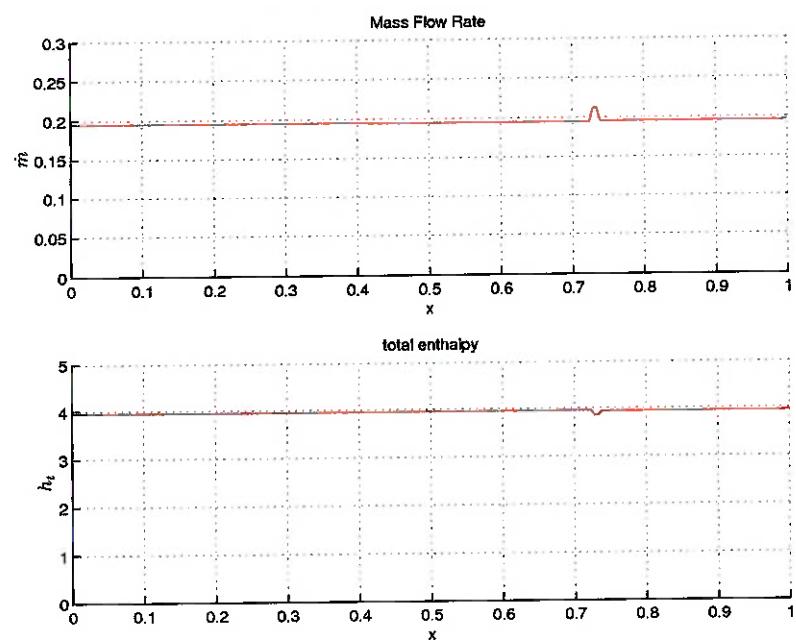


Figura 5.25: Bocal 6 - Fluxo de massa e Entalpia de estagnação

Capítulo 6

Conclusão

A família de métodos utilizada nesse trabalho, chamada de *Split Fluxes*, é de grande importância para escoamentos compressíveis e velocidades elevadas, pois pode-se, com ela, verificar o quanto de informação é passada e em quais direções, decidindo qual o melhor esquema de interpolação.

O problema estudado nesse trabalho, um bocal com geometria axisimétrica, submetido a um escoamento de um fluido compressível sem viscosidade, térmica e caloricamente perfeito, é de relativa simplicidade. Porém, justamente por sua simplicidade, ele é ideal para o aprendizado de métodos para a resolução do escoamento compressível. O uso das equações de Euler no aprendizado é importante, pois partir de um conjunto completo de equações como as de Navier-Stokes não fornece informações detalhadas sobre as contribuições individuais dos efeitos no escoamento.

Como foi mostrado na seção 4, no caso de velocidades elevadas para bocais, a camada limite não descola da parede. Assim, os efeitos da viscosidade não são muito importantes, e o fluido pode ser considerado invíscido. Ainda, o escoamento se mostrou axisimétrico, e pôde ser simplificado para um problema quasi-unidimensional, já que as variações das velocidades no eixo perpendicular ao escoamento são muito menores do que as variações da velocidade paralela ao escoamento. Fica assim, validado os resultados produzidos pelo programa do aluno, bem como o modelo utilizado.

O bom funcionamento de um bocal depende em grande parte de um bom projeto,

e estes métodos são excelentes ferramentas de análise. Pode-se, por exemplo, calcular os esforços que as paredes do bocal vão estar submetidas para manter a estrutura coesa, o empuxo a que ele estará submetido e o regime transitório até se obter a condição de operação, em regime permanente.

Portanto, é possível prever se ondas de choque ocorrerão dentro do bocal ou não, bem como as variações das propriedades do fluido, como temperatura, pressão e densidade. A ocorrência de ondas de choque, no caso de bocais de propulsão, pode ser extremamente perigoso, já que o empuxo é significativamente diminuído.

Em bocais reguladores de vazão, por outro lado, este efeito pode ser extremamente útil, pois a saída supersônica não é desejável. A condição de blocagem do bocal é suficiente para seu funcionamento, e velocidades elevadas na saída ocasionariam perdas de carga desnecessárias.

O uso de programas de simulação computacional produz resultados que dependem muito da maneira com que o usuário faz a montagem do problema. O conhecimento dos métodos envolvidos pode ser de grande ajuda nas simulações, já que provém o usuário de uma ferramenta poderosa de análise, pois não há um método universalmente aceito em todas as situações, e os programas de simulação não são infalíveis. Assim, a escolha do melhor método para o caso estudado é de responsabilidade do engenheiro.

Referências Bibliográficas

- [1] Fox, R. W. e McDonald, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC editora, quarta edição, 2000.
- [2] Incropera, F. P. e DeWitt, D. P. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. LTC editora, quarta edição, 1998.
- [3] Lomax, H., Pulliam, T. H., e Zingg, D. W. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*.
- [4] MacCormack, R. *Numerical Computation of Compressible Viscous Flow*.
- [5] Maliska, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC editora, segunda edição, 1995.
- [6] Santos, L. C. C. *A Hybrid Inverse Optimization Method for Aerodynamic Design of Lifting Surfaces*. Tese de Doutoramento, Georgia Institute of Techology, Atlanta, Março 1993.
- [7] Sonntag, R. E., Borgnakke, C., e Van Wylen, G. J. *Fundamentos da Termodinâmica*. Editora Edgar Blücher, quinta edição, 1998.
- [8] Volpe, E. V. Comunicações pessoais.
- [9] Volpe, E. V. Notas de aula.
- [10] Volpe, E. V. *Estudo da Transferência de Calor e Quantidade de Movimento no Escoamento Laminar Através de Passagens com Geometria Arbitrária: Modelos Compressível e Incompressível*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.